Vendredi 05 Décembre 2025

Filière : TSI1

VE3

Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés

Consignes

- *La qualité de la rédaction et de la présentation, ainsi que la clarté et la précision des raisonnements, constitueront des critères essentiels dans l'appréciation des copies. Il est attendu des élèves qu'ils justifient soigneusement leurs réponses et qu'ils rappellent avec précision les références des questions abordées.*
- Le sujet comporte **deux exercices** et **deux problèmes**. Vous pouvez les traiter dans l'ordre de votre choix.
- Les **théorèmes ou résultats fondamentaux du cours** utilisés doivent être clairement mentionnés, de préférence en citant leur *nom exact*.
- Les **copies et feuilles de composition** doivent être **numérotées** de la forme *« page x / total »* (par exemple : *1/4, 2/4, . . .*).

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} 2^k$.

2.

2.a. Montrer que pour tout $k \geq 1 \quad , 1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(1+k+k^2)^2}{k^2(k+1)^2}$.

2.b. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = n + 1 - \frac{1}{n+1}$.

3.

3.a. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

3.b. En déduire pour tout $x \in \mathbb{R}$ la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \ \operatorname{th}(2^k x).$$

4. Soit $x \in]0, \pi[$. Montrer par récurrence simple sur n que $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(2^k x\right) = \frac{\sin\left(2^n x\right)}{2^n \sin(x)}$

Exercice 2

1. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto x \ln x$.

2. Déterminer les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) : \quad xy'(x) + 2y(x) = \ln x.$$

3. Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y''(x) + y'(x) + y(x) = x^2 + x + 1.$$

4. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1+t)y''(t) - 2y'(t) + (1-t)y(t) = (1+t)^3 e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

4.a. Montrer que $t \mapsto e^t$ est solution de l'équation homogène associée à (1).

4.b. Soit y une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On pose $z(t) = y(t)e^{-t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Montrer que y est solution de (1) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle à résoudre.

4.c. Donner les solutions de (1).

Problème 1
La convergence des sommes des inverses des carrés vers $\pi^2/6$

Le but de ce problème est de montrer que la suite de terme général $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.

Première Partie
Démonstration d'une inégalité utile
(Proposée par un des élèves)

On commence par établir l'inégalité suivante, que nous noterons (★) et qui sera utilisée dans la deuxième partie :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t) \qquad (\bigstar)$$

Pour cela on considère $f(t) = \frac{\pi}{2}\sin(t)t - t$ sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Justifier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée sur I.

2. Étduier le signe de f' sur I.
(Indication : étudier le signe sur les intervalles $[0, \alpha]$ et $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, où $\alpha = \arccos(2/\pi)$)

3. Donner alors le tableau de variations de f sur I.

4. En déduire (★).

Deuxième Partie

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n \, dt \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^n \, dt.$$

5. Calculer I_0, J_0, I_1, J_1.

6. Montrer que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8. **8.a** En utilisant (★) dans la premiére partie, montrer que

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+2}) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

8.b En déduire que la suite de terme général $\frac{J_n}{I_n}$ converge vers 0.

9.

♣ **9.a** Montrer que

$$I_{n+2} = \frac{1}{2}(n+2)((n+1)J_n - (n+2)J_{n+2}) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

♣ **9.a** En déduire que

$$\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{2}{(n+2)^2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Montrer que la suite de terme général S_n converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Problème 2
Expression simplifiée d'une fonction

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. Par « solution d'une équation différentielle », on fait référence aux solutions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$. Les deux parties du problème sont largement indépendantes ; seul le résultat de la question 2 de la première partie est utile pour la suite.

Première Partie
Résultats préliminaires

1. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$h(x + y) = h(x) + h(y),$$

on pose

$$H(x) = \int_0^x h(t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1.a. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_0^y h(x + t)\, dt = yh(x) + H(y).$$

1.b. En déduire que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$H(x + y) - H(x) - H(y) = yh(x).$$

1.c. Exprimer de même la quantité $xh(y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1.d. Justifier alors que, pour tout réel x,

$$h(x) = xh(1).$$

2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Pour tout $x \in I$, on pose

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\, dt.$$

2.a. Justifier que F est dérivable sur I et préciser sa dérivée.

2.b. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient $u : J \to \mathbb{R}$, $v : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs dans I. On pose

$$F_1(x) = \int_{x_0}^{v(x)} f(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad F_2(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt, \quad x \in J.$$

2.b.i Montrer que F_1 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.

2.b.ii En déduire que F_2 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.

2.b.iii Si de plus u et v sont de classe C^1, justifier que F_1 et F_2 le sont aussi.

♣ **3. Application :**

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et soit (a, b) un couple de réels avec $a < b$. En effectuant un changement de variable, montrer que l'application

$$G : x \mapsto \int_a^b g(x+t)\cos t\, dt$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x,

$$G'(x) = g(b+x)\cos b - g(a+x)\cos a + \int_a^b g(x+t)\sin t\, dt.$$

Deuxième Partie
Étude d'une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt. \tag{1}$$

On suppose de plus que f n'est pas la fonction nulle et on considère un réel a tel que $f(a) \neq 0$.

4. Justifier que $f(0) = 0$.

5.

5.a. Vérifier que, pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{1}{f(a)} \int_{x-a}^{x+a} f(t)\, dt.$$

5.b. Montrer alors que f est dérivable et calculer sa dérivée.

5.c. En déduire que f est de classe C^1 et deux fois dérivable.

6. Montrer que, pour tout couple (x, y) de réels,

$$f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y) \qquad \text{et} \qquad f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y).$$

7. On pose $\lambda = -\dfrac{f''(a)}{f(a)}$. Déduire de ce qui précède que f est solution de l'équation différentielle

$$z'' + \lambda z = 0 \qquad (E_\lambda)$$

8. Étude d'une équation différentielle (E_λ)

8.a. On suppose que $\lambda > 0$ et on pose $\mu = \sqrt{\lambda}$.

Montrer qu'il existe un réel non nul A tel que $f(x) = A\sin(\mu x)$, $x \in \mathbb{R}$, puis justifier que $A = \dfrac{2}{\mu}$.

8.b. On suppose $\lambda < 0$ et on pose $\mu = \sqrt{-\lambda}$.

Montrer qu'il existe $A' \neq 0$ tel que $f(x) = A'\,\mathrm{sh}(\mu x)$ et justifier que $A' = \dfrac{2}{\mu}$.

8.c. Si $\lambda = 0$, montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 2x$.

9. Vérifier que les fonctions trouvées ci-dessus vérifient bien l'équation fonctionnelle (1).

FIN DU SUJET