Vendredi 30 Octobre 2026
Durée : 2 heures
Classe : 1TSI1

Devoir Surveillé N°3
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Fonctions usuelles

Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés

Consignes

- Le sujet comporte un **exercice** et un **problème**. Vous pouvez les traiter dans l'ordre de votre choix.
- Toute réponse doit être **justifiée avec soin** ;
- Toute **question précédente** réutilisée dans un raisonnement doit être explicitement mentionnée (par exemple : *« Par Q.3. »*).
- Les résultats doivent être **encadrés ou soulignés**.
- La qualité de la rédaction et le soin apporté à la copie sont pris en compte dans la notation.
- Les **copies et feuilles de composition** doivent être **numérotées** de la forme *« page x / total »* (par exemple : *1/4, 2/4, . . .*).

Tournez la page S.V.P.

Exercice — La fonction de Gudermann

Dans tout l'exercice, on note sh, ch et th les fonctions sinus, cosinus et tangente hyperboliques respectivement.

On considère les trois fonctions définies par

$$f(x) = \arctan\big(\mathrm{sh}(x)\big), \qquad g(x) = 2\arctan\left(e^x\right) - \frac{\pi}{2}, \qquad h(x) = \arcsin\big(\mathrm{th}(x)\big).$$

1. **Trois expressions, une seule fonction.**
   a) Justifier que f, g et h sont bien définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

   b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f'(x) = g'(x) = h'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}.$$
   c) En déduire que $f = g = h$ sur $\mathbb{R}$.

   Dans la suite, on note gd cette fonction commune, appelée **fonction de Gudermann**.
2. **Une bijection.**
   a) Étudier la parité de gd.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{gd}(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{gd}(x)$, puis dresser le tableau de variations de gd.
   c) Montrer que gd réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. **Un dictionnaire entre trigonométrie circulaire et hyperbolique.**
   Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\tan\big(\mathrm{gd}(x)\big) = \mathrm{sh}(x), \qquad \sin\big(\mathrm{gd}(x)\big) = \mathrm{th}(x), \qquad \cos\big(\mathrm{gd}(x)\big) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}.$$
4. **La bijection réciproque.**
   On note $\mathrm{gd}^{-1} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la bijection réciproque de gd. Soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Établir que
   $$\mathrm{gd}^{-1}(y) = \ln\left(\tan(y) + \frac{1}{\cos(y)}\right).$$
5. **Dérivée de la réciproque.** Justifier que gd^{-1} est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et, à l'aide du théorème de dérivation d'une bijection réciproque et de la question 3, montrer que
   $$\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \left(\mathrm{gd}^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\cos(y)}.$$

Problème — Les inégalités de Shafer–Fink

On se propose d'établir l'encadrement suivant, dû à R. E. Shafer (1967) pour la minoration et à A. M. Fink (1995) pour la majoration :

$$\forall x \in]0,1], \qquad \frac{3x}{2+\sqrt{1-x^2}} \;<\; \arcsin(x) \;\leq\; \frac{\pi x}{2+\sqrt{1-x^2}},$$

puis d'en déduire un encadrement analogue pour la fonction $\arctan$.

On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité classique suivante, notée (★) :

$$\forall t \geq 0, \qquad \sin(t) \leq t, \quad \text{avec égalité si et seulement si } t = 0. \tag{★}$$

Partie A — Étude d'une fonction auxiliaire

On définit, pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$F(t) = \frac{t\,(2+\cos(t))}{\sin(t)},$$

et, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$N(t) = 2\sin(t) + \sin(t)\cos(t) - t - 2t\cos(t).$$

A.1. Montrer que N est dérivable et que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$N'(t) = 2\sin(t)\,(t - \sin(t)).$$

A.2. En déduire que $N(t) > 0$ pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

A.3. Justifier que F est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et montrer que

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad F'(t) = \frac{N(t)}{\sin^2(t)}.$$

A.4. (a) Rappeler la valeur de $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t}$, puis déterminer $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t)$.

(b) Calculer $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(c) Dresser le tableau de variations de F sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et en déduire que

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad 3 \;<\; F(t) \;\leq\; \pi.$$

Partie B — L'encadrement de Shafer–Fink pour $\arcsin$

B.1. Soit $x \in]0,1]$ et $t = \arcsin(x)$. Justifier que $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis exprimer $\sin(t)$ et $\cos(t)$ en fonction de x.

B.2. En déduire l'encadrement de Shafer–Fink :

$$\forall x \in]0,1], \qquad \frac{3x}{2+\sqrt{1-x^2}} \;<\; \arcsin(x) \;\leq\; \frac{\pi x}{2+\sqrt{1-x^2}}.$$

B.3. Optimalité des constantes.

(a) Soit $k > 0$ tel que : $\forall x \in]0,1],\ \dfrac{kx}{2+\sqrt{1-x^2}} \leq \arcsin(x)$.

En utilisant $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x)}{x}$, que l'on justifiera, montrer que $k \leq 3$.

(b) Soit $k' > 0$ tel que : $\forall x \in]0,1],\ \arcsin(x) \leq \dfrac{k'x}{2+\sqrt{1-x^2}}$. Montrer que $k' \geq \pi$.

B.4. Application numérique. En utilisant B.2 en $x = \dfrac{1}{2}$, montrer que

$$\pi \ > \ \frac{18}{4+\sqrt{3}} \ = \ \frac{18\,(4-\sqrt{3})}{13}.$$

On admet que $\dfrac{18}{4+\sqrt{3}} \approx 3{,}1402$ *: sans calculatrice, on obtient ainsi les deux premières décimales de* π.

Partie C — L'encadrement de Shafer pour $\arctan$

C.1. Soit $x > 0$ et $t = \arctan(x)$. Justifier que $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, puis montrer que

$$\cos(t) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin(t) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

C.2. En déduire que

$$\forall x > 0, \qquad \frac{3x}{1+2\sqrt{1+x^2}} \ < \ \arctan(x) \ < \ \frac{\pi x}{1+2\sqrt{1+x^2}}.$$

FIN DU SUJET