**Vendredi 02 Octobre 2026**
**Durée : 2 heures**
**Classe : 1TSI1**

---

# Devoir Surveillé N°2
# ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
## Nombres complexes — Étude de fonctions

---

**Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés**

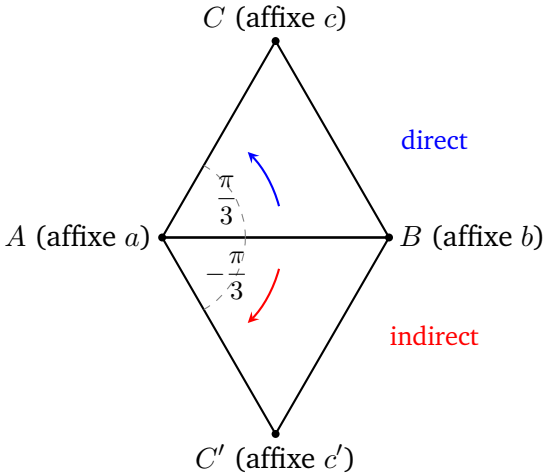
**Consignes**

- Le sujet comporte un **exercice** et un **problème**. Vous pouvez les traiter dans l'ordre de votre choix.
- Toute réponse doit être **justifiée avec soin** ;
- Toute **question précédente** réutilisée dans un raisonnement doit être explicitement mentionnée (par exemple : *« Par Q.3. »*).
- Les résultats doivent être **encadrés ou soulignés**.
- La qualité de la rédaction et le soin apporté à la copie sont pris en compte dans la notation.
- Les **copies et feuilles de composition** doivent être **numérotées** de la forme *« page x / total »* (par exemple : *1/4, 2/4, . . .*).

**Tournez la page S.V.P.**

## Exercice 1 — Caractérisation complexe des triangles équilatéraux

On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.




*Sur la figure : $C$ est l'image de $B$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ — le triangle $ABC$ est alors équilatéral **direct** (sens trigonométrique). $C'$ est l'image de $B$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ — le triangle $ABC'$ est alors équilatéral **indirect**.*

1. (a) Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$. (b) Justifier que $\overline{j} = j^2$.
2. Soient $A$, $B$, $C$ trois points du plan, d'affixes respectives $a, b, c \in \mathbb{C}$. Montrer que
$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = (a + jb + j^2c)(a + j^2b + jc).$$
3. a) Montrer que $e^{i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/3}$ sont les deux solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.
   b) En déduire que $ABC$ est équilatéral si et seulement si
$$(c-a)^2 - (c-a)(b-a) + (b-a)^2 = 0,$$
   puis que $ABC$ est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
4. En déduire que
$$ABC \text{ équilatéral} \iff a + jb + j^2c = 0 \quad \text{ou} \quad a + j^2b + jc = 0.$$
   *On admet (cohérent avec la figure) que le premier cas correspond à un triangle $ABC$ direct, et le second à un triangle indirect.*
5. **Application.** Soient $A$, $B$, $C$ d'affixes respectives $a = 0$, $b = 4$, $c = 2 + 2i\sqrt{3}$.
   a) Calculer $a + jb + j^2c$. Que peut-on en conclure sur la nature et l'orientation du triangle $ABC$ ?
   b) Vérifier, par un calcul direct de $AB$, $BC$ et $CA$, que ce résultat est cohérent.

# Problème — Module maximal sur $\mathbb{U}$ et étude d'une fonction

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\varphi(z) = |z^3 - z + 2|.$$

On souhaite déterminer la valeur maximale de $\varphi(z)$ lorsque $z$ décrit $\mathbb{U}$.

**Partie A — Une équation auxiliaire**

**A.1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (1+i)z + i = 0.$$

**A.2.** On note $z_1$ et $z_2$ les deux solutions trouvées. Vérifier que $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$.

**A.3.** Comparer $\varphi(z_1)$ et $\varphi(z_2)$.
*On verra dans la suite du problème si l'une de ces deux valeurs est le maximum cherché.*

**Partie B — Ramener le problème à l'étude d'une fonction réelle**

**B.1.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

**B.2.** Soit $z \in \mathbb{U}$ et $\theta$ un argument de $z$.

(a) Montrer que

$$\varphi(z)^2 = 6 - 4\cos(\theta) - 2\cos(2\theta) + 4\cos(3\theta).$$

(b) En déduire que

$$\varphi(z)^2 = f(\cos(\theta)), \qquad \text{où } f(x) = 16x^3 - 4x^2 - 16x + 8.$$

Déterminer le maximum de $\varphi$ sur $\mathbb{U}$ revient donc à déterminer le maximum de $f$ sur $[-1, 1]$.

**Partie C — Étude de la fonction $f$**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 16x^3 - 4x^2 - 16x + 8$.

**C.1.** (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

**C.2.** (b) Étudier la dérivabilité de $f$, puis calculer $f'$.

**C.3.** En étudiant le signe de $f'(x)$, dresser le tableau de variations complet de $f$ sur $\mathbb{R}$, en y faisant figurer les limites ainsi que les valeurs exactes de $f$ aux points critiques et en $x = -1$, $x = 1$. En déduire

$$\max_{x \in [-1,1]} f(x),$$

en précisant en quel point ce maximum est atteint.

**Partie D — Conclusion**

**D.1.** En utilisant les parties B et C, déterminer la valeur maximale de $\varphi(z)$ pour $z \in \mathbb{U}$. *Comparer avec les valeurs $\varphi(z_1)$ et $\varphi(z_2)$ trouvées dans la Partie A .*

**D.2.** Le maximum de $f$ sur $[-1,1]$ est atteint en un point $x_0$ que l'on identifiera à $\cos(\theta_0)$ pour un angle remarquable $\theta_0 \in ]-\pi,\pi]$. Déterminer $\theta_0$, puis justifier qu'il existe en réalité **deux** valeurs de $\theta \in ]-\pi,\pi]$ telles que $\cos(\theta) = x_0$.

**D.3.** En déduire la ou les valeurs de $z \in \mathbb{U}$ pour lesquelles le maximum de $\varphi$ est atteint, sous forme algébrique. *Que remarquez-vous ? (on pourra comparer avec le nombre $j$ de l'exercice 1)*

## FIN DU SUJET