Vendredi 18 Septembre 2026

Durée : 2 heures

Classe : 1TSI1

Devoir Surveillé N°1

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés

Consignes

- Le sujet comporte **trois exercices**. Vous pouvez les traiter dans l'ordre de votre choix.
- Toute **question précédente** réutilisée dans un raisonnement doit être explicitement mentionnée (par exemple : *« Par Q.3. »*).
- Les **copies et feuilles de composition** doivent être **numérotées** de la forme *« page x / total »* (par exemple : *1/4, 2/4, . . .*).

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

On considère la fonction f :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > \dfrac{1}{2}$.
   (Indication :*On pourra mettre $x^2 - x + 1$ sous forme canonique.*)
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
5. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, étudier son signe sur $\mathbb{R}$, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variations complet de f (limites comprises).
6. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.
7. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$, dont on précisera une équation.
8. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$, en faisant apparaître les asymptotes et la tangente T.

Exercice 2

Équations classiques

1. Résoudre sur $]-\pi, \pi]$ l'équation
$$2\sin(x) = \sqrt{3}.$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1.$$

Une équation à trois termes

3. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) = \sin(3x)\big(2\cos(2x) + 1\big).$$
   b) En déduire que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation
$$\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) = 0$$
   est $\left\{\dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Une valeur remarquable

4. Soit θ l'unique élément de $[0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$.
   a) Calculer $\cos(2\theta)$.
   b) Calculer $\cos(4\theta)$.
   c) En déduire que $4\theta \equiv \pm\theta\ [2\pi]$.

d) Conclure que $\theta = \dfrac{2\pi}{5}$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{2+x}\,dx.$$

Partie A — Une relation de récurrence

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$J_n + 2J_{n-1} = \frac{1}{n}.$$
2. Calculer J_0, puis en déduire, à l'aide de la question 1., les valeurs exactes de J_1 et J_2.

Partie B — Monotonie et limite

3. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Partie C — Mieux comprendre J_n

5. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,
$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{3} + \frac{1-x}{3(2+x)}.$$
6. En déduire que
$$J_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3}K_n, \qquad \text{où } K_n = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{2+x}\,dx.$$
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq K_n \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$
8. En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} nJ_n = \frac{1}{3}.$$

FIN DU SUJET