

Chapitre 11 : Nombres Réels

1 Nombres rationnels ou irrationnels

Définition 1

On note $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \right\}$.

- Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont appelés **nombres rationnels**.
- Les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont appelés **nombres irrationnels**.

Remarque 1 $x \in \mathbb{Q} \iff \exists (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, x = \frac{a}{b}$

Exemples 1 • Exemples de nombres irrationnels : $\sqrt{2}$, π et e .

- Exemples de nombres rationnels : -1 , $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Proposition 1

- (i) Si $x, y \in \mathbb{Q}$, alors $x + y \in \mathbb{Q}$.
- (ii) Si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- (iii) Si $x, y \in \mathbb{Q}$, alors $xy \in \mathbb{Q}$.
- (iv) Si $x \in \mathbb{Q}^*$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exemples 2 $x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ et $z = \sqrt{2}$ sont des irrationnels

Remarquons que $x + y = 0$ est rationnel et que $x + z = 2\sqrt{2}$ est irrationnel.

Ainsi on peut rien dire sur la somme de deux irrationnels.

2 Valeur absolue

Définition 2

On appelle **valeur absolue** d'un réel x , le réel positif

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Proposition 2

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

- $|x| \geq 0$ et $(|x| = 0 \iff x = 0)$
- $|-x| = |x|$.
- $-|x| \leq x \leq |x|$.
- Si $\alpha \geq 0$, alors : $|x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha$.
- $|xy| = |x||y|$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x^n| = |x|^n$.

Proposition 3

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Plus généralement si $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

Exercice 1 Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Montrer que : $|2x - y| + |x - y| + |x - 1| \geq 1$.

Corollaire 1

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

3 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

3.1 Majoration et minoration

Définition 3

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que A est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que chaque élément de A est inférieur ou égal à M , c-à-d :

Dans ce cas, on dit que M est un **majorant** de A .

- On dit que A est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que chaque de A est supérieur ou égal à m , c-à-d :

Dans ce cas, on dit que m est un **minorant** de A .

- On dit que A est **bornée** si elle est majorée et minorée. Ce qui est équivalent à dire que :

Remarque 2 • A est non majoré ssi :

- A est non minoré ssi :

Exemples 3 • L'ensemble $A = \left\{ \frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \right\}$ est borné.

- L'ensemble $A = \left\{ \frac{x^2}{1+|x|} : x \in \mathbb{R} \right\}$ est minoré par 0, mais non majoré.

3.2 Maxima et minima

Définition 4

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que M est le **maximum** ou le **plus grand élément** de A si $M \in A$ et M est un majorant A , i.e.

Dans ce cas, on note alors $m = \max(A)$.

- On dit que m est le **minimum** ou le **plus petit élément** de A si $m \in A$ et m est un minorant de A , i.e.

Dans ce cas, on note alors $m = \min(A)$.

Exemples 4 L'ensemble $A =]0, 1]$ admet un maximum mais elle n'admet pas de minimum.

Exercice 2 Déterminer le minimum et le maximum de $A = [0, 1]$.

3.3 Bornes inférieures et supérieures

Définition 5

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On appelle **borne supérieure** de A le minimum de l'ensemble des majorants de A , **s'il existe**. Dans ce cas, on le note $\sup(A)$.
- On appelle **borne inférieure** de A le maximum de l'ensemble des minorants de A , **s'il existe**. Dans ce cas, on le note $\inf(A)$.

Exercice 3 Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de $A =]0, 1]$.

Rien ne garantit a priori l'existence d'une borne inférieure ou supérieure. On a néanmoins le théorème suivant :

Théorème 1: (Axiome de la borne supérieure)

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Proposition 4

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- Si A admet un maximum, alors elle admet une borne sup et $\sup(A) = \max(A)$.
- Si A admet un minimum, alors elle admet une borne inf et $\inf(A) = \min(A)$.

Exercice 4 Déterminer la borne supérieure de $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Proposition 5: (Caractérisation de la borne supérieure)

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.

$$M = \sup A \iff \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{Aucun nombre strictement inférieur à } M \text{ n'est majorant de } A \end{cases}$$

Ce qui s'écrit en termes de quantificateurs :

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq M \\ \forall \alpha < M, \quad \exists a \in A, \quad \alpha < a \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à :

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad M - \varepsilon < a \end{cases}$$

Proposition 6: (Caractérisation de la borne inférieure)

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.

$$m = \inf A \iff \begin{cases} m \text{ est un minorant de } A \\ \text{Aucun nombre strictement supérieur à } m \text{ n'est minorant de } A \end{cases}$$

Ce qui s'écrit en termes de quantificateurs :

$$m = \inf A \iff \begin{cases} \forall a \in A, \quad a \geq m \\ \forall \alpha > m, \quad \exists a \in A, \quad a < \alpha. \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à :

$$m = \inf A \iff \begin{cases} \forall a \in A, \quad a \geq m \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad a < m + \varepsilon. \end{cases}$$

4 Propriété d'Archimède

La partie $\mathbb{N}$ n'est pas majorée, ce qui signifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad n \geq x.$$

On a alors la propriété suivante :

Proposition 7

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad nx \geq y.$$

5 Partie entière et approximations décimales d'un réel

Définition 6

On appelle **partie entière** d'un nombre réel x le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x . On le note $\lfloor x \rfloor$.

$$\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

Exemples 5 • $\lfloor \sqrt{2} \rfloor =$

• $\lfloor -1, 12 \rfloor =$

• $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor n \rfloor =$

Proposition 8

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\lfloor x \rfloor = n \iff n \leq x < n + 1,$$

Remarque 3 On a :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\lfloor \sqrt{n^2 + 1} \rfloor$.

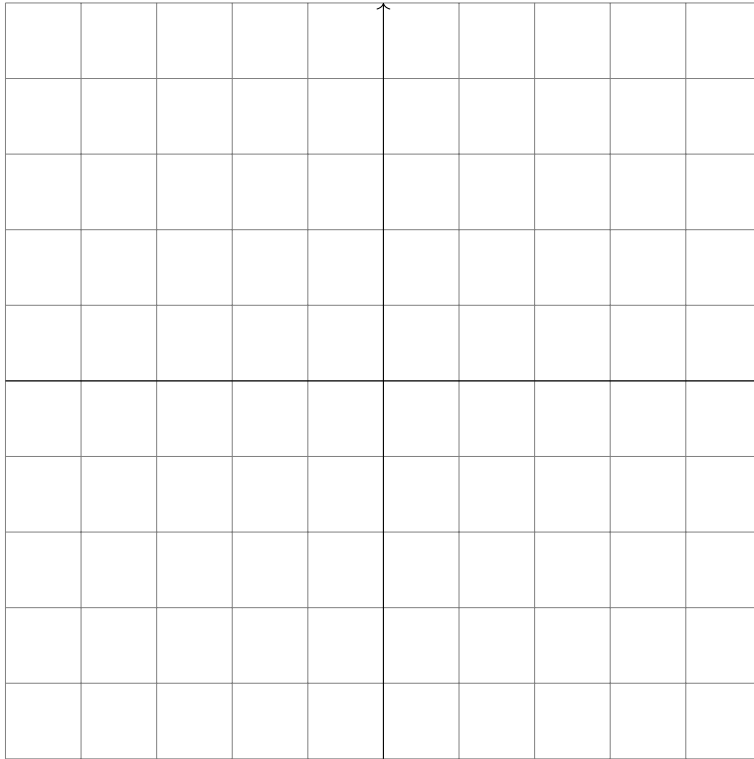
Corollaire 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

- Le nombre $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est la **valeur décimale approchée de x par défaut** à la précision $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$.
- Le nombre $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \frac{1}{10^n}$ est la **valeur décimale approchée de x par excès** à la précision $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$.

Graphes de la fonction partie entière



6 Intervalles

Définition 7

Les **intervalles** sont les parties de $\mathbb{R}$ de la forme :

- (i) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\};$
- (ii) $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\};$
- (iii) $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\};$
- (iv) $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\};$
- (v) $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\};$
- (vi) $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\};$
- (vii) $] - \infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\};$
- (viii) $] - \infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\};$
- (ix) $] - \infty, +\infty[= \mathbb{R},$

où a et b désignent deux nombres réels tels que $a \leq b$.

Proposition 9

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle ssi :

$$\forall a, b \in I, \quad a \leq b \implies [a, b] \subset I.$$

Exercice 6 Justifier que $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$

7 Droite numérique achevée

Définition 8

On appelle **droite numérique achevée** l'ensemble :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

- On prolonge la relation d'ordre $\leq$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant : $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, x \leq +\infty$ et $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, x \geq -\infty$.
- On prolonge partiellement à $\overline{\mathbb{R}}$ les opérations sur $\mathbb{R}$ selon les tables :

	$+$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$+$	$+$	$-\infty$	y	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$*$
$x \in \mathbb{R}$	x	$-\infty$	$x+y$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$*$	$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$-\infty$	$y < 0$	0	$y > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$*$	$-\infty$	$-\infty$
$x < 0$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	$*$	0	0	0	$*$
$x > 0$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$*$	$+\infty$	$+\infty$

où $*$ correspond à un cas où l'opération n'est pas définie (**forme indéterminée**).