Vendredi 22 Mai 2026

Filière : 1TSI

VE4

(inspiré de Maths 1 — CNC 2026)

Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés

Consignes

- Le sujet est constitué d'**un problème** de **3 parties**.
- *La qualité de la rédaction et de la présentation, ainsi que la clarté et la précision des raisonnements, constitueront des critères essentiels dans l'appréciation des copies. Il est attendu des élèves qu'ils justifient soigneusement leurs réponses et qu'ils rappellent avec précision les références des questions abordées.*
- Les **théorèmes ou résultats fondamentaux du cours** utilisés doivent être clairement mentionnés, de préférence en citant leur *nom exact*.
- Les **copies et feuilles de composition** doivent être **numérotées** de la forme « *page x / total* » (par exemple : *1/4, 2/4, ...*).

Séries numériques

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle **série de terme général** a_n, notée $\sum_{n\geq 0} a_n$, la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Convergence : La série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est **convergente** si (S_n) admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$, appelée **somme** de la série : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := \ell$. Sinon, elle est **divergente**.

Théorème (Critère de d'Alembert) : Soit $\sum a_n$ une série à non nuls à partir dún certain rang telle que que $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$. Alors :

$$\ell < 1 \implies \text{convergente}, \qquad \ell > 1 \implies \text{divergente},$$

Partie A : Formule de Taylor avec reste intégrale

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, avec $n \in \mathbb{N}$. Soit $(a,b) \in I^2$; on pose

$$R_k = \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt, \quad 0 \leq k \leq n.$$

2.1. Formule de Taylor avec reste intégrale

2.1.1. Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$R_{k-1} = \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k.$$

2.1.2. En déduire la formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégrale suivante :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt. \tag{1}$$

2.2. Application au calcul de la somme d'une série

2.2.1. Montrer que pour tout réel x, la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente.

2.2.2. Justifier que pour tout réel x et tout entier naturel $n \geq 1$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt.$$

2.2.3. Montrer que, pour tout réel non nul x et tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

2.2.4. En déduire la limite de la suite $\left(\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt\right)_{n\geq 1}$, pour tout réel x.

2.2.5. Montrer que pour tout réel x,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Partie B : Application au résultat d'indépendance linéaire de la famille $(1, e, e^2)$

L'objet de cette partie est de montrer que dans $\mathbb{R}$, considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, la famille $(1, e, e^2)$ est libre.

3.1. Construction du nombre réel e, base du logarithme népérien

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$a_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n + \frac{1}{n!\,n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

3.1.1. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On note e leur limite commune.

3.1.2. Justifier que $a_n < e < b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3.1.3. Irrationalité de e

Raisonnant par l'absurde, on suppose que e est rationnel et on pose $e = \dfrac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Vérifier que les nombres $q!\,a_q$ et $q!\,e$ sont des entiers et conclure à une contradiction.

3.2. Convergence d'une suite d'entiers

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente d'entiers relatifs dont la limite est nulle. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad x_n = 0.$$

3.3. Application au résultat d'indépendance linéaire

Dans la suite de cette partie, on suppose qu'il existe trois nombres rationnels α, β et γ tels que

$$\alpha + \beta \cdot e + \gamma \cdot e^2 = 0.$$

On cherche à montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

3.3.1. Montrer qu'on peut supposer que les nombres α, β et γ sont des entiers relatifs.

On suppose désormais que les nombres α, β et γ sont des entiers relatifs et on considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha e^{-x} + \gamma e^x.$$

3.3.2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \alpha e^{-x} + \gamma e^x.$$

3.3.3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha e^{-1} + \gamma e = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma + (-1)^k \alpha}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \left((-1)^{n+1} \alpha e^{-t} + \gamma e^t\right) dt.$$

3.3.4. On considère la suite numérique $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n = \int_0^1 (1-t)^n \left((-1)^{n+1} \alpha e^{-t} + \gamma e^t\right) dt.$$

Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3.3.5. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$n!\beta + n! \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma + (-1)^k \alpha}{k!} = 0,$$

puis en déduire que

$$\forall n \geq n_0 + 1, \quad \gamma + (-1)^n \alpha = 0.$$

3.3.6. Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Partie C : Majoration des normes uniformes des dérivées successives

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on désigne par $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ telles que f et sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$.

Pour tout élément f de $\mathcal{F}_n$, on pose $M_0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|$.

L'objet de cette partie est d'établir que $\mathcal{F}_n$ est inclus dans $\mathcal{F}_k$ pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, puis d'obtenir une majoration de $M_k = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$ en fonction de M_0 et M_n.

4.1. Étude du cas $n = 2$

Soit f une application **non constante** de $\mathcal{F}_2$. On rappelle que f et sa dérivée seconde f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose $M_0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

4.1.1. Montrer que $M_2 > 0$ et que $M_0 > 0$.

4.1.2. Soit x un réel et soit $h > 0$. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, à un ordre à préciser, trouver un majorant des quantités $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)|$ et $|f(x-h) - f(x) + hf'(x)|$ en fonction de M_2 et h, puis en déduire que

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}.$$

4.1.3. Montrer que l'application f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

On pourra étudier la fonction $t \mapsto \dfrac{M_0}{t} + \dfrac{M_2 t}{2}$ définie sur $]0, +\infty[$.

4.2. Étude des inclusions $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et tout $n \geq 2$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit f une application **non constante** de $\mathcal{F}_n$. On rappelle que f et sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose $M_0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|$.

4.2.1. Soit x un réel et soit $h > 0$. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, à un ordre à préciser, montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x)\right| \leq 2M_0 + \frac{M_n h^n}{n!}.$$

4.2.2. En déduire que, pour tout $h > 0$ fixé, la fonction

$$F_h : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x)$$

est bornée sur $\mathbb{R}$ et exprimer un majorant $\|F_h\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |F_h(x)|$ en fonction de M_0, M_n et h.

4.2.3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $h_1, \dots, h_{n-1}$ des réels deux à deux distincts tels que $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_{n-1}$. On note B_{n-1} le vecteur colonne de composantes $F_{h_1}(x), F_{h_2}(x), \dots, F_{h_{n-1}}(x)$, et H_{n-1} la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$H_{n-1} = \begin{pmatrix} h_1 & \dfrac{h_1^2}{2!} & \cdots & \dfrac{h_1^{n-1}}{(n-1)!} \\ h_2 & \dfrac{h_2^2}{2!} & \cdots & \dfrac{h_2^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-1} & \dfrac{h_{n-1}^2}{2!} & \cdots & \dfrac{h_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}$$

(i) Pour $n \in \{3, 4\}$, calculer le déterminant de la matrice H_{n-1} et justifier qu'elle est inversible.

Dans la suite de cette partie, on admettra que pour tout $n \geq 2$, la matrice H_{n-1} est inversible.

(ii) Vérifier que le vecteur $(f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x))$ est solution du système linéaire $H_{n-1}X = B_{n-1}$, d'inconnue X.

(iii) Déduire de ce qui précède que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, la fonction $f^{(k)}$ s'exprime comme combinaison linéaire des fonctions $F_{h_1}, F_{h_2}, \dots, F_{h_{n-1}}$.

4.2.4. Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_k$.

Dans la suite, on pose $M_k = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

4.2.5. Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $M_k \geq 0$ et que $M_k \leq \sqrt{2M_{k-1}M_{k+1}}$.

4.2.6. Majoration de M_k en fonction de M_0 et M_n, pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$:

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose $a_k = 2^{k-1}\dfrac{M_k}{M_{k-1}}$.

(i) Vérifier que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_k \leq a_{k+1}$.

(ii) Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $(a_1 \cdots a_k)^n \leq (a_1 \cdots a_n)^k$.

(iii) En déduire que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}.$$

Fin de l'épreuve