VE2

- *La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.*
- Le problème est composé de trois parties.

Problème
Étude d'une équation différentielle linéaire

Dans ce problème, on s'intéresse à la résolution de l'équation différentielle linéaire

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = (1+x^2)^2 \ln x \tag{1}$$

Par "solution d'une équation différentielle", on fait référence aux *solutions à valeurs réelles définies sur l'intervalle* $]0,+\infty[$.

$1^{\text{ère}}$ Partie
Résultats préliminaires utiles

1.1. Trouver des réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[\,, \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

1.2. En déduire les primitives sur l'intervalle $]0,+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

1.3. Donner une primitive sur l'intervalle $]0,+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto x\ln x$.

1.4. Donner une primitive sur l'intervalle $]0,+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto (1-x^2)\ln x$.

$2^{\text{ème}}$ Partie
Résolution de l'équation sans second membre

On s'intéresse ici à l'équation différentielle linéaire homogène (2) suivante associée à (1) :

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \tag{2}$$

2.1. Déterminer un $\alpha > 0$ tel que la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ soit solution de l'équation différentielle homogène (2).

2.2. Soit $\varphi :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable; on pose :

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}, x \in]0, +\infty[$$

2.2.1. Vérifier que la fonction ψ est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2.2.2. Montrer que la fonction φ est une solution de (2) si, et seulement si, la fonction ψ' est solution, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle

$$z' + \frac{2}{x(x^2+1)} z = 0 \tag{3}$$

2.3. Résoudre l'équation (3) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2.4. Préciser l'ensemble Σ_0 des solution, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de l'équation (2).

3$^{\text{ème}}$ Partie
Résolutions de l'équation complète

On note Σ l'ensemble des solutions, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle 1.

3.1. On suppose ue l'on connaît une solution φ_0 de l'équation différentielle 1. Montrer que

$$\Sigma = \{\varphi_0 + g, g \in \Sigma_0\}$$

3.2. Recherche d'une telle solution particulière φ_0
On cherche une solution particulière φ_0 de l'équation différentielle (1) sous la forme

$$\varphi_0 : x \longmapsto x\lambda(x) + (x^2 - 1)\mu(x),$$

où λ et μ sont des fonctions dérivables sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et vérifiant :

$$\forall x > 0, \quad x\lambda'(x) + (x^2 - 1)\mu'(x) = 0 \tag{4}$$

3.2.1. Montrer que la fonction φ_0 est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et exprimer sa dérivée φ_0' à l'aide des fonctions λ et μ.

3.2.2. En déduire que la fonction φ_0 est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et exprimer sa dérivée seconde φ_0'' à l'aide des fonction λ', μ et μ'.

3.2.3 Montrer que la fonction φ_0 est solution, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de l'équation différenteille (1) si, et seulement si,

$$\forall x > 0, \quad \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1 + x^2)\ln x \tag{5}$$

3.2.4 Soit $x > 0$. Déterminer les expressions des réels $\lambda'(x)$ et $\mu'(x)$ en résolvant le système linéaire d'équations (4) et (5).

3.2.5 En déduire les expressions des fonctions λ et μ.

3.3. Préciser alors les solutions, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle (1).

FIN DU SUJET