VE1

- *La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.*
- Le sujet est composé de deux problèmes.

Problème 1 :

Partie I : Préambule

Dans ce qui suit, on désigne par x_1, x_2 et x_3 trois réels distincts, et par P une fonction polynomiale de degré strictement plus petit que trois, qui ne s'annule pas en x_1, x_2 et x_3. Soit Q la fonction polynomiale définie, pour tout réel x, par :

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

On pose, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

On **admet** qu'il existe a_1, a_2 et a_3 tels que, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \frac{a_3}{x - x_3}$$

1. En calculant, de deux façons différentes :

   $$\lim_{x \to x_1} (x - x_1) g(x)$$

   établir que :

   $$a_1 = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}$$

   Donner les expressions analogues pour a_2 et a_3 (en les justifiant brièvement)

2. On suppose désormais que, pour tout x :

   $$P(x) = 1$$

   avec l'hypothèse suivante :

   $$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -\frac{1}{2}$$

   Donner les valeurs explicites de a_1, a_2 et a_3.

Partie 2 : Exercice

On considère la fonction F, qui, à tout réel x de son domaine de définition $\mathcal{D}_F$, associe :

$$F(x) = \ln\left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}\right)$$

1 Déterminer $\mathcal{D}_F$. Ce résultat sera nécessairement justifié à l'aide d'un tableau de signes.

2 Justifier que F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$. On désigne par f sa dérivée.

3 Montrer que, pour tout réel x de $\mathcal{D}_F$:

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}$$

4 Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

(a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = H(2n+1) - \frac{1}{2}H(n)$$

(b) Montrer, que pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = 3 + 4H(n) - 4H(2n+1) + \frac{1}{n+1}$$

Problème 2 :

Le but de ce problème est de calculer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt := \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

On introduit les fonctions G et H, définies respectivement sur les domaines $\mathcal{D}_G \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_H \subset \mathbb{R}$, par :

$$\forall x \in \mathcal{D}_G, G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}} d\theta$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_H, H(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

1. Expliciter, en le justifiant avec soin, $\mathcal{D}_G$.
2. (a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $G(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x}$.

   (b) Déterminer :

   $$\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0$$

   On pourra utliser librement le résultat suivant dans les questions suivantes :
   G est dérivable sur $\mathcal{D}_G$ et $G'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-2x}{\cos^2 \theta} e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}} d\theta$, pour tout $x \in \mathcal{D}_G$.

3. (a) Expliciter $\mathcal{D}_H$.

   (b) Montrer que la fonction H est de classe C^1 sur $\mathcal{D}_H$. On explicitera la dérivée de H.
4. À l'aide du changement de variable $u = x \tan \theta$, montrer que, en tout réel x de son domaine de dérivabilité,

   $$G'(x) = -2e^{-x^2} H(x)$$

5. Montrer que la fonction $H^2 + G$ est constante, en précisant la valeur de cette constante.
6. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.