Feuille d'exercices N°17
Développements Limités

Exercice 1 *Déterminer les développements limités suivants :*

(1) $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $\sin x$

(2) $DL_3(0)$ de $\ln(1+e^x)$

(3) $DL_4(1)$ de $\frac{\ln x}{x}$

(4) $DL_3(0)$ de $\ln(2+\sin x)$

(5) $DL_3(0)$ de $sh(x)ch(2x) - ch(x)$

(6) $DL_3(0)$ de $\sqrt{3+\cos x}$

Exercice 2 *Déterminer les développements limités suivants :*

(1) $DL_2(0)$ de $(1+x)^{1/x}$

(2) $DL_3(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$

(3) $DL_3(0)$ de $\frac{x-\sin x}{1-\cos x}$

(4) $DL_4(0)$ de $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

(5) $DL_2(0)$ de $\frac{\arctan x}{\tan x}$

(6) $DL_2(0)$ de $\frac{\sin(x)}{\exp(x)-1}$

(7) $DL_4(0)$ de $\ln\left(\frac{\sinh x}{x}\right)$

(8) $DL_2(1)$ de $\frac{x-1}{\ln x}$

(9) $DL_3(0)$ de $\frac{x\cosh x - \sinh x}{\cosh x - 1}$

Exercice 3 *On considère la fonction* $f : x \mapsto \arctan(\mathrm{e}^x)$.

1. *Former un* $DL_2(0)$ *de* $f'(x)$.
2. *En déduire un* $DL_3(0)$ *de* $f(x) = \arctan(e^x)$.

Exercice 4

1. (a) *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Rappeler le* $DL_2(0)$ *de* $(1+x)^\alpha$.
   (b) *Former un* $DL_4(0)$ *de* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   (c) *En déduire un* $DL_5(0)$ *de* $\arccos(x)$.
2. *On considère la fonction* $f : x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$.
   (a) *Justifier que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer* f'.
   (b) *En déduire un* $DL_5(0)$ *de* f.

Exercice 5 *Déterminer les limites suivantes :*

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2-x^4}$

(2) $\lim_{x\to 0} x(3+x)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$

(4) $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1-\cos 2x}$

(6) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1}\ln\left(1-\frac{\sqrt{x}}{x+2}\right)$

(7) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

(8) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\arctan x}{x\tan x}$

Exercice 6 *Déterminer les limites suivantes :*

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\sin x}{\tan x - x}$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\arctan x}{\sinh^3 x}$

(4) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

(5) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

(6) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x^2-1)}{x\sqrt{x}-1}$

(7) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1-2x\ln x}{x(x-1)\ln x}$

(8) $\lim_{x\to +\infty} x^2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+x-1$

Exercice 7 *Calculer les limites suivantes :*

(1) $\lim_{x\to +\infty} \left[\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right]\ln x$

(2) $\lim_{x\to +\infty} \left[e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{1/x}$

Exercice 8 *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2$ *et* $a \in \mathbb{R}$. *Calculer :*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a-h)-2f(a)+f(a+h)}{h^2}.$$

Exercice 9 *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

1. *Donner un* $DL_3(0)$ *de* f.
2. *Montrer que la courbe représentative de* f *admet une tangente au point d'abscisse* 0, *dont on précisera l'équation.*
3. *Prouver que la courbe traverse la tangente en* 0. *Un tel point est appelé point d'inflexion.*

Exercice 10 *Soit* $f :]-1,0[\cup]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}.$$

1. *Montrer que* f *peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.*
2. *Quelle est alors la position relative de la courbe de* f *par rapport à sa tangente en ce point ?*

Exercice 11

1. *On pose :* $f(x) = \frac{x+1}{1+\exp(1/x)}$
   (a) *Montrer que :* $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{x}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4x}+o(\frac{1}{x})$.
   (b) *En déduire que* $\mathcal{C}_f$ *une asymptote en* $+\infty$ *en précisant sa position par rapport à* $\mathcal{C}_f$.
2. *On pose :* $g(x) = x\exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$.
   (a) *Montrer que :* $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} x+2+\frac{2}{x}+o(\frac{1}{x})$.
   (b) *En déduire que* $\mathcal{C}_g$ *une asymptote en* $+\infty$ *en précisant sa position par rapport à* $\mathcal{C}_g$.

Exercice 12 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = 0$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$.

1. *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n-1 \leqslant u_n \leqslant n$.
2. *En déduire que :* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
3. *Montrer que :* $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - n = \frac{1}{2}$.

4. En déduire que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \frac{1}{2} + o(1)$.
5. Montrer que : $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} n + \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
6. Conclure que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 13 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède une solution unique x_n dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Établir que : $\arctan x_n = x_n - n\pi$.
3. Montrer que : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - \pi n$.
5. En déduire que : $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \circ(1)$.
6. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
7. En déduire que :
$$x_n - n\pi \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}\right).$$
8. Conclure que :
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 14 *Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{x^2}$.*

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Donner la parité de f^{-1}.
3. Monter que f^{-1} est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
4. Justifier que f^{-1} admet $DL_5(0)$ de la forme suivante :
$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5).$$
5. Donner un $DL_5(0)$ de $f(x)$.
6. Calculer un $DL_5(0)$ de la composée $f^{-1}(f(x))$.
7. En déduire le $DL_5(0)$ de $f^{-1}(x)$.

Exercice 15 *Le but de ce problème est de démontrer la formule de Stirling :*
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Partie 1 : Étude des intégrales de Wallis

1. Soit (x_n) une suite décroissante de réels strictement positifs telle que $x_{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$. Montrer que $x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt.$$
Justifier cette dernière égalité.
3. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n > 0$.
5. Calculer w_0 et w_1.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.
7. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n w_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$.
8. Montrer que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Partie 2 : Un résultat de Abraham de Moivre

1. Soit (u_n) une suite réelle décroissante et minorée. Soit (v_n) une suite réelle telle que $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1} - u_n$. On va montrer que (v_n) converge.
   (a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall n \geqslant n_0,\ \frac{3}{2}(u_{n+1} - u_n) \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n).$$
   (b) En déduire que la suite (v_n) est décroissante à partir d'un certain rang, et minorée.
   (c) Conclure.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$a_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \quad et \quad b_n = \ln(a_n).$$
Et, pour tout $t \in]-1, +\infty[\setminus\{0\}$:
$$f(t) = 1 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\ln(1+t).$$
   (a) Donner le développement limité de f à l'ordre 2, en 0.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} - b_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$.
   (c) Montrer que:
   $$b_{n+1} - b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{12n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12n}.$$
   (d) En déduire que la suite (b_n) converge.
   (e) Montrer que la suite (a_n) converge vers une constante strictement positive ℓ et que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$.

Partie 3 : Fin de la preuve de la formule de Stirling

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{2n} = \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2}\frac{\pi}{2}$.
2. En déduire la valeur de ℓ et la formule de Stirling.