

Feuille d'exercices N°18

Calcul Matriciel

Exercice 1 Calculer :

$$(2 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (2 \ 1 \ 0)$$

Exercice 2 Calculer :

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 Calculer :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 Calculer :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer leur inverses.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 6 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a et b la matrice A est-elle inversible ?

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0$.
2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .

Exercice 8 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .
2. Retrouver ce résultat en montrant que $A^2 - 4A + I_2 = 0$.

Exercice 9 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Exprimer A^2 en fonction de A .
2. En déduire que $A^n = 3^{n-1}A$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10 Soit $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de A et de I_2 .
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$, et donner une expression de α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n .
3. Exprimer α_{n+2} en fonction de α_{n+1} et α_n .
4. Déterminer α_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire l'expression générale de A^n .

Exercice 11 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = A - 2I_3.$$

1. Montrer que $B^2 = 3B$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = 2^n I_3 + \frac{5^n - 2^n}{3} B$.

Exercice 12 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

1. Calculer B^2, B^3 , puis B^n pour $n \geq 3$.
2. Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.
3. En déduire A^n pour tout entier n .

Exercice 13 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $(A - I_4)^2 = 0$.
2. En remarquant que $A = I_4 + (A - I_4)$, calculer A^n pour tout entier $n \geq 2$.
La formule est-elle encore vraie pour $n = 0$ et $n = 1$?

Exercice 14 On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 9 & -12 & -15 \\ -12 & -6 & 8 & 10 \\ 24 & 12 & -16 & -20 \\ 36 & 18 & -24 & -30 \end{pmatrix}$$

1. On note $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice ligne L pour laquelle: $A = CL$.
2. Calculer LC et en déduire une expression simple de A^n pour tout entier positif n .

Exercice 15 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $R(0)$.
2. Montrer que : $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$.
3. Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, R(\theta)^n = R(n\theta)$.
4. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R(\theta)$ est inversible, et calculer son inverse.

Exercice 16 On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies par leurs premiers termes u_0 et v_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 6u_n - v_n \text{ et } v_{n+1} = u_n + 4v_n.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice A telle que pour tout n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que l'on peut décomposer A sous la forme $A = 5I + J$ où I est la matrice identité et J une matrice à déterminer qui vérifie $J^2 = 0$.
4. En déduire A^n pour tout n . (On pensera à vérifier la formule pour $n = 0$ et $n = 1$).
5. Obtenir alors les expressions de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0 .

Exercice 17 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et

$X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. Que vaut D^n ?

4. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N} : D^n = P^{-1}A^nP$.
5. En déduire les coefficients de A^n .
6. Vérifier que pour tout n dans $\mathbb{N} : X_{n+1} = AX_n$.
7. En déduire X_n en fonction de A^n et de X_0 .
8. Déterminer la valeur de u_n en fonction de n .

Exercice 18 On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.
2. Résoudre le système linéaire :

$$(S) \begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Exercice 19 Rappelons qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

1. Montrer que les matrices suivantes sont nilpotentes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente.

Exercice 20 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

1. Que dire de A^k pour $k > p$?
2. Établir que A n'est pas inversible.
3. En utilisant les règles de calcul dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ simplifier les expressions

$$\begin{aligned} & (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \dots + A^{p-1}) \\ & (I_n + A + A^2 + \dots + A^{p-1})(I_n - A). \end{aligned}$$

4. En déduire que $I_n - A$ est inversible et donner son inverse.

5. Application : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^2 et A^3 .

(b) Montrer que $I_3 - A$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 21 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux nilpotentes qui commutent, c'est-à-dire $AB = BA$. On veut montrer que $A + B$ est aussi nilpotente.

1. Cas particulier : On suppose que $A^2 = 0_n$ et $B^3 = 0_n$.
Montrer que : $(A + B)^4 = 0_n$.

2. Cas général : Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $A^p = 0_n$ et $B^q = 0_n$.

(a) Vérifier que :

- $\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, A^k B^{p+q-1-k} = 0_n$;
- $\forall k \in \llbracket p, p+q-1 \rrbracket, A^k B^{p+q-1-k} = 0_n$.

(b) En déduire que $(A+B)^{p+q-1} = 0_n$, puis conclure.

Exercice 22 Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $M^3 = A$.

- (a) Montrer alors que $AM = MA$.
 (b) En déduire que M est diagonale.

2. Résoudre l'équation $M^3 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 23 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose :

$$\text{Com}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : AM = MA\}.$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- (a) Démontrer : $0_n \in \text{Com}(A)$ et $I_n \in \text{Com}(A)$.
 (b) Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \in \text{Com}(A)$,
 (c) Soient $(M_1, M_2) \in \text{Com}(A)^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.
 Démontrer que : $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in \text{Com}(A)$.

2. Dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, déterminer $\text{Com}(A)$.

Exercice 24 Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de M , et on note $\text{tr}(M)$, la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}.$$

1. Calculer $\text{tr}(I_n)$.
 2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B).$$

3. Montrer que $\text{tr}({}^t A) = \text{tr}(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 4. Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 5. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}(A).$$

6. Existe-t-il des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $AB - BA = I_n$?

Exercice 25 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le scalaire noté $\det(A)$ défini par

$$\det(A) = ad - bc.$$

On pose $A' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer les produits AA' et $A'A$.
 2. Déduire que A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et que, si tel est le cas, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

3. Application : Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer leur inverses.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 26 On rappelle qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- symétrique si ${}^t M = M$,
- antisymétrique si ${}^t M = -M$.

On rappelle aussi que :

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ii} = 0.$$

2. Montrer que :

$$\forall A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda A + \mu B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}).$$

3. Montrer que :

$$\forall A, B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda A + \mu B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}).$$

4. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $M = 0_n$.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Montrer que : $M + {}^t M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $M - {}^t M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

(b) Montrer que : $\exists (A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{K}), M = A + B$.

(c) Montrer l'unicité du couple (A, B) dans la question précédente.

6. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \iff AB = BA.$$

7. Soient $A, B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$AB \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \iff AB = -BA.$$

8. Soit $A \in \mathcal{S}_n \cap GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

9. Soit $A \in \mathcal{A}_n \cap GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A^{-1} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.