

# Feuille d'exercices N°16

## Dérivabilité

**Exercice 1** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est dérivable mais n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 2** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ x + 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  mais n'est pas deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 3** Montrer que la fonction  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Exercice 4** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable.

1. Montrer que, si  $f$  est paire, alors  $f'$  est impaire.
2. Montrer que, si  $f$  est impaire, alors  $f'$  est paire.
3. Montrer que, si  $f$  est périodique, alors  $f'$  est périodique.

**Exercice 5** Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en  $a$ .

Calculer :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ .

**Exercice 6** Justifier que la fonction  $f : x \mapsto (x^2 + 1)e^x$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et calculer sa dérivée  $n$ -ème pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 7** Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f : x \mapsto x^2(1+x)^n$  et  $g : x \mapsto (1+x)^n$ .

1. Justifier que  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} (x+1)^{n-k}.$$

3. En déduire la dérivée  $n$ -ème de  $f$ .

**Exercice 8** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $\omega \in \mathbb{R}^*$ .

1. Calculer la dérivée  $n$ -ème de  $x \mapsto \cos(\omega x)$ .
2. Linéariser  $\cos^3 x$ .
3. Calculer la dérivée  $n$ -ème de  $f : x \mapsto \cos^3 x$

**Exercice 9** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Calculer la dérivée  $n$ -ième de  $\varphi : x \mapsto e^{(1+i)x}$ .
2. En déduire la dérivée  $n$ -ième de  $f : x \mapsto \cos(x)e^x$ .

**Exercice 10** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction non injective continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Montrer que :

$$\exists c \in ]a, b[, f'(c) = 0$$

**Exercice 11** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, b]$  telle que :

$$f(a) = f'(a) \text{ et } f(b) = f'(b).$$

1. Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f''(c) = f'(c)$ .
2. En considérant la fonction  $g : x \mapsto (f(x) - f'(x))e^x$  montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f''(c) = f(c)$ .

**Exercice 12** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Montrer que,

$$\forall x > 0, \exists c > 0, f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c)).$$

**Exercice 13** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et dont la dérivée ne s'annule pas. Montrer que  $f$  n'est pas périodique.

Indication : On pourra raisonner par l'absurde.

**Exercice 14** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, a+2h]$  (avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ ).

1. Montrer que :

$$\exists d \in ]a, a+h[, f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h(f'(d+h) - f'(d)).$$

Indication : introduire  $g(x) = f(x+h) - f(x)$ .

2. En déduire que :

$$\exists c \in ]a, a+2h[, f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c).$$

**Exercice 15** Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a < b \in \mathbb{R}$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $n$  fois dérivable. Montrer que si

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ et } f(b) = 0$$

alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f^{(n)}(c) = 0$ .

**Exercice 16** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ , deux fois dérivable sur  $]0, 1[$  telle que  $f(0) = f(1) = 0$  et :

$$\exists x \in ]0, 1[, f(x) > 0.$$

1. Montrer que :  $\exists a \in ]0, x[, f'(a) = \frac{f(x)}{x}$ .
2. Montrer que :  $\exists b \in ]x, 1[, f'(b) = -\frac{f(x)}{1-x}$ .
3. En déduire que :  $\exists c \in ]a, b[, f''(c) < 0$ .

**Exercice 17** 1. En appliquant TAF montrer que

$$\forall x > 0, \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

2. En déduire, pour  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$$

**Exercice 18** À l'aide du théorème des accroissements finis déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right).$$

**Exercice 19** Établir les inégalités suivantes :

1. Pour tout  $x \geq 0$  :  $x \leq e^x - 1 \leq xe^x$ .
2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $0 \leq \cosh x - 1 \leq x \sinh x$ .
3. Pour tout  $x > -1$  :  $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$

**Exercice 20** On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

1. En utilisant TAF montrer que, pour tous  $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{n}{n^2 + (k+1)^2} \leq \arctan \frac{k+1}{n} - \arctan \frac{k}{n} \leq \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

2. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \arctan \frac{n+1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{\pi}{4}.$$

3. En déduire que  $(u_n)_n$  est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 21** 1. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto x^3 + 3x - 1$  est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Déduire que :  $\exists ! c \in \mathbb{R}, f(c) = 0$ .

3. Établir que  $c \in [0, 1]$ .

4. Montrer que  $c$  est l'unique point fixe de  $g : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 3}$ .

5. Donner le tableau de variations de  $g'$  sur  $[0, 1]$ .

6. Montrer que  $g$  est  $\frac{1}{8}$ -lipschitzienne sur  $[0, 1]$ .

7. On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 \in [0, 1]$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) = \frac{1}{u_n^2 + 3}.$$

- (a.) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$ .

- (b.) Établir que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_{n+1} - c\| \leq \frac{1}{8} \|u_n - c\|$ .

- (c.) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n - c\| \leq \frac{1}{8^n}$ .

- (d.) Déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = c$ .

- (e.) Déterminer un rang  $p$  pour que  $u_p$  soit une valeur approchée de  $c$  à la précision  $10^{-5}$ .

**Exercice 22** Théorème de la moyenne

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Montrer :

$$\exists c \in ]a, b[, \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c).$$

**Exercice 23** Soit  $n \geq 2$  un entier fixé et  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}.$$

1. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et calculer  $f'(x)$  pour  $x \geq 0$ .

2. En étudiant le signe de  $f'(x)$  sur  $\mathbb{R}_+$ , montrer que  $f$  atteint un minimum sur  $\mathbb{R}_+$  que l'on déterminera.

3. En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n).$$

4. Montrer que si  $x \in \mathbb{R}^+$  et  $y \in \mathbb{R}^+$  alors on a

$$(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

**Exercice 24** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Montrer que  $f$  est lipschitzienne.

**Exercice 25** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ . On suppose que  $f(0) = 0$  et que  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

1. Justifier que  $f'$  admet un minimum sur  $[0, 1]$ .

2. Montrer qu'il existe  $m > 0$  tel que :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) \geq mx.$$

**Exercice 26** Soit  $g$  une fonction 2 fois dérivable sur  $[a, b]$  telle que  $g(a) = g(b) = 0$  et  $g''(x) \leq 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ .

1. Justifier que :  $\exists c \in ]a, b[, g'(c) = 0$ .

2. Montrer que :

$$\forall x \in [a, c], g'(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [c, b], g'(x) \leq 0.$$

3. En déduire que :  $\forall x \in [a, b], g(x) \geq 0$ .

**Exercice 27** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ , telle que  $f(0) = 0$  et vérifiant

$$\forall x \geq 0, f'(x) \leq f(x).$$

En étudiant les variations de la fonction  $g : x \mapsto e^{-x} f(x)$ , démontrer que la fonction  $f$  est identiquement nulle.

**Exercice 28** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et bornée telle que  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ . Montrer que  $\ell = 0$ .

Indication : Appliquer TAF sur  $[x, 2x]$ .

**Exercice 29** Règle de l'Hôpital

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$  ( $a < b$ ) et dérivables sur  $]a, b[$ . On suppose que  $g'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ .

1. Montrer que  $g(x) \neq g(a)$  pour tout  $x \in ]a, b[$ .

2. Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

3. On suppose que  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ , où  $\ell$  est un nombre réel.

$$\text{Montrer que : } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

4. Application : déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$ .

**Exercice 30** Rolle à l'infini

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$  et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  pour laquelle :  $f(0) = \lim_{+\infty} f = 0$ .

On souhaite démontrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $f'(c) = 0$ .

On considère alors la fonction  $g$  définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par :

$$g(x) = \begin{cases} f(\tan x) & \text{si } x \in [0, \pi/2[ \\ 0 & \text{si } x = \pi/2 \end{cases}$$

1. Établir que  $g$  est continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

2. Justifier que  $g$  est dérivable sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , puis calculer  $g'(x)$ .

3. Conclure.

**Exercice 31** Formule d'Euler Mac-Laurin

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $[a, b]$  ( $a < b$ ). On s'intéresse à la fonction  $\varphi$  définie sur  $[a, b]$  par :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2} (f'(x) + f'(a)) + \frac{(x-a)^3}{12} A$$

avec  $A \in \mathbb{R}$ .

1. Justifier que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, b]$ , puis calculer  $\varphi'(x)$  et  $\varphi''(x)$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

2. Calculer  $\varphi(a)$ , puis déterminer  $A$  tel que  $\varphi(b) = 0$ .

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que  $A$  est un tel réel.

3. Montrer qu'il existe  $c_1 \in ]a, b[$  tel que  $\varphi'(c_1) = 0$ . Que vaut  $\varphi'(a)$  ?

4. Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\varphi''(c) = 0$ .

5. En déduire que :

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2} (f'(a) + f'(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(c).$$

Cette formule est appelée **formule d'Euler Mac-Laurin**.

**Exercice 32** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une fonction bornée deux fois dérivable et telle qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \alpha f(x) \leq f''(x).$$

1. **Étude de la monotonie de  $f$**

(a.) Que dire de la monotonie de  $f'$  ?

(b.) Justifier que  $f'$  admet une limite en  $+\infty$ . On pose alors  $\ell' = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ .

(c.) Montrer que :

$$\forall x > 0, \exists c_x \in ]x, 2x[, f(2x) - f(x) = x f'(c_x).$$

(d.) Déduire que :  $\ell' = 0$ .

(e.) Conclure des questions précédentes que  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. **Détermination de la limite de  $f$  en  $+\infty$**

(a.) Montrer que  $f$  admet nécessairement une limite finie en  $+\infty$ . On pose alors  $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(b.) On suppose que  $\ell > 0$ . Montrer que :

$$\forall t \geq 0, f''(t) \geq \alpha \ell.$$

(c.) Montrer que :  $\forall x \geq 0, f'(x) \geq f'(0) + \alpha x$ .

(d.) En déduire une absurdité puis montrer que  $\ell = 0$ .

3. **Majoration de la fonction  $f$ .**

(a.) Étudier la monotonie et la limite en  $+\infty$  de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \alpha (f(x))^2 - (f'(x))^2$

(b.) Déduire de la question précédente que :

$$\forall x \geq 0, \sqrt{\alpha} f(x) + f'(x) \leq 0.$$

(c.) Établir que la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $h(x) = f(x)e^{\sqrt{\alpha}x}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

(d.) Conclure que :  $\forall x \geq 0, f(x) \leq f(0)e^{-\sqrt{\alpha}x}$ .