

# Feuille d'exercices N°15

## Continuité

**Exercice 1** Étudier la continuité sur  $\mathbb{R}$  des fonctions suivantes :

(a)  $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$ , et  $f(0) = 0$  ;

(b)  $g(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$ , et  $g(0) = 0$  ;

(c)  $h(x) = x[x]$ .

**Exercice 2** 1. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[na]}{n}$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( a + \frac{\sqrt{2}}{n} \right).$$

2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est totalement discontinue.

3. Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On veut montrer que 0 est le seul point de continuité de  $g$ .

- a. Établir que :  $\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq |x|$ .
- b. En déduire que  $g$  est continue en 0.
- c. Montrer que  $g$  est discontinue en tout point  $a \in \mathbb{R}^*$ .

**Exercice 3** Dire si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité à  $\mathbb{R}$  tout entier :

(a)  $f(x) = \sin(x) \sin(1/x)$  si  $x \neq 0$ ;

(b)  $g(x) = \cos(x) \cos(1/x)$  si  $x \neq 0$ ;

(c)  $h(x) = \sin(x+1) \ln|1+x|$  si  $x \neq -1$ .

**Exercice 4** Soit  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $f(0) = f(2)$ . Montrer que :

$$\exists c \in [0, 1], f(c+1) = f(c).$$

**Exercice 5** Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $p, q \in \mathbb{R}^+$ . Montrer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que

$$p \cdot f(a) + q \cdot f(b) = (p+q) \cdot f(c)$$

**Exercice 6** Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues telles que  $f(a) \leq g(a)$  et  $f(b) \geq g(b)$ . Montrer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = g(c)$ .

**Exercice 7** Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  continue. Montrer que  $f$  admet un point fixe.

**Exercice 8** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$ .

1. a. Peut-on avoir :  $\forall x \in \mathbb{R}_-, f(x) \geq 0$  ?  
b. En déduire que :  $\exists a \in \mathbb{R}_-, f(a) < 0$ .
2. Justifier que :  $\exists b \in \mathbb{R}_+, f(b) > 0$ .
3. En déduire que  $f$  s'annule.

**Exercice 9** Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, positive et telle que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1$ .

On souhaite montrer que  $f$  admet un point fixe. On considère alors la fonction  $g : x \mapsto f(x) - x$ .

1. Vérifier que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Quel est le signe de  $g(0)$  ?
3. Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .
4. En déduire :  $\exists x_0 \in \mathbb{R}_+, g(x_0) \leq 0$ .
5. Conclure que :  $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+, f(\alpha) = \alpha$ .

**Exercice 10** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = f(1)$ .

On pose :  $g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$ .

1. Montrer que  $g$  est continue sur  $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ .
2. Calculer :  $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$ .
3. a. Peut on avoir :  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, g\left(\frac{k}{n}\right) > 0$  ?  
b. En déduire que :  $\exists k_1 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, g\left(\frac{k_1}{n}\right) \leq 0$ .

4. Montrer que :  $\exists k_2 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, g\left(\frac{k_2}{n}\right) \geq 0$ .

5. Démontrer que :  $\exists c_n \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ ,

$$f(c_n) = f\left(c_n + \frac{1}{n}\right).$$

**Exercice 11** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  continue. Montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 12** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que pour chaque  $x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = 1$ . Montrer que  $f = 1$  ou  $f = -1$ .

**Exercice 13** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

1. Justifier :  $\exists M \geq 0, \forall t \in [0, 1], |f(t)| \leq M$ .

2. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \int_0^1 t^n f(t) dt \right| \leq \frac{M}{n+1}$ .

3. Dédurre que :  $\int_0^1 t^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Exercice 14** Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que

$$\forall x \in [a, b], f(x) < g(x).$$

Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) - \alpha.$$

**Exercice 15** Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues. On suppose que :

$$\forall x \in [a, b], f(x) > g(x) > 0.$$

Montrer qu'il existe  $k > 1$  tel que  $f \geq kg$ .

**Exercice 16** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $0 < a \leq b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Montrer que :

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in [a, b], \alpha x \leq f(x) \leq \beta x.$$

**Exercice 17** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue admettant une limite finie en  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 18** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $T$ -périodique. On veut montrer que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

1. Justifier qu'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall x \in [0, T], |f(x)| \leq M.$$

2. Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $n = -\lfloor \frac{x}{T} \rfloor$ .

a. Montrer que :  $x + nT \in [0, T]$ .

b. En déduire que :  $|f(x)| \leq M$ .

c. Conclure que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 19** Soient  $k \in [0, 1[$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $k$ -lipschitzienne telle que  $f(0) = 0$ .

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $(u_n)$  la suite réelle déterminée par

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq k^n |a|$ .

2. En déduire que :  $u_n \xrightarrow{+\infty} 0$ .

**Exercice 20** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x).$$

1. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ .

2. En déduire que  $f$  est une fonction constante.

**Exercice 21** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Calculer  $f(0)$  et montrer que  $f$  est impaire.

2. Justifier que :  $\forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}, f(nx) = nf(x)$ .

3. Établir que pour tout  $r \in \mathbb{Q}, f(r) = ar$  avec  $a = f(1)$ .

4. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que :  $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ .

5. Conclure que pour tout  $x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$ .

**Exercice 22** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue en 1 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x).$$

Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $(u_n)$  la suite définie par

$$u_0 = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}.$$

1. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

En déduire que  $(u_n)$  est convergente et calculer sa limite.

2. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = f(x)$ .

3. Montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 23** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que :

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty.$$

On veut montrer que  $f$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}$ , i.e. :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(c).$$

1. Montrer qu'il existe  $a \in \mathbb{R}_-^*$  et  $b \in \mathbb{R}_+^*$  tels que :

$$\forall x \leq a, f(x) \geq f(0) \quad \text{et} \quad \forall x \geq b, f(x) \geq f(0).$$

2. Justifier qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que :

$$\forall x \in [a, b], f(x) \geq f(c).$$

3. Comparer  $f(0)$  et  $f(c)$ .

4. Conclure que  $f$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}$  en  $c$ .

**Exercice 24** Soit la fonction  $f : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in ]0, 1], f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 + e^x}.$$

1. Vérifier que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.

On note alors  $g$  le prolongement par continuité de  $f$  en 0.

2. Montrer que  $g$  possède un minimum sur  $[0, 1]$ .

3. En déduire que  $f$  possède un minimum sur  $]0, 1]$ .

**Exercice 25** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et décroissante. On veut montrer que  $f$  admet un unique point fixe, pour cela on introduit la fonction  $g : x \mapsto f(x) - x$ .

1. a. Justifier que  $f$  admet en  $+\infty$  une limite  $\ell$  dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ .

b. En déduire que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

2. Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ .

3. Établir que  $g$  est strictement décroissante.

4. En déduire que  $g$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .

5. Conclure que  $f$  admet un unique point fixe.

**Exercice 26** Soit  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  croissante telle que  $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$  soit décroissante. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Indication : on pourra étudier la continuité à droite et la continuité à gauche.

**Exercice 27** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue en 0 et en 1 telle que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$ .

1. Établir que  $f$  est paire.

2. Soient  $x > 0$  et  $(u_n)$  la suite définie par :

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}.$$

a. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = x^{\frac{1}{2^n}}$ .

b. En déduire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

c. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = f(x)$ .

d. En déduire que  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

3. Montrer que  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 28** Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$  continues telles que :

$$\forall x \in [a, b], f \circ g(x) = g \circ f(x).$$

On pose  $E = \{x \in [a, b] : f(x) = x\}$ .

1. Montrer que :  $\exists x_0 \in [a, b], f(x_0) = x_0$ .

2. Justifier que  $E$  admet une borne inférieure et une borne supérieure. On notera  $\alpha = \inf E$  et  $\beta = \sup E$ .

3. Vérifier que :  $\alpha, \beta \in [a, b]$ .

4. Justifier qu'il existe une suite  $(\alpha_n)$  d'éléments de  $E$  telle que  $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha$ . On montrerait de même qu'il existe une suite  $(\beta_n)$  d'éléments de  $E$  telle que  $\beta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \beta$ .

5. Montrer que  $\alpha$  et  $\beta$  sont dans  $E$ .

6. Montrer que  $g(\alpha)$  et  $g(\beta)$  sont dans  $E$ .

7. Établir que :  $\exists c \in [a, b], f(c) = g(c)$ .

**Exercice 29** On propose de fournir une démonstration du théorème des valeurs intermédiaires en utilisant la borne supérieure.

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $f(a) \leq 0$  et  $f(b) \geq 0$ . On considère l'ensemble

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}.$$

1. Justifier que  $A$  admet une borne supérieure. On pose alors  $c = \sup A$ .

2. Établir que  $c \in [a, b]$ .

3. Montrer qu'il existe une suite  $(c_n)$  d'éléments de  $A$  telle que  $c_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} c$ .

4. En déduire que  $f(c) \leq 0$ .

5. On suppose que  $c = b$ . Montrer que :  $f(c) = 0$ .

6. On suppose que  $c < b$ .

a. Montrer que :  $\forall x \in ]c, b], f(x) > 0$ .

b. En déduire que :  $f(c) = 0$ .

7. Conclure.