

Feuille d'exercices N°9

Exercice 1 On munit le plan d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points suivants, définis par leurs coordonnées polaires :

$$A\left(1, \frac{\pi}{4}\right) \quad B\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right) \quad C\left(2, \frac{\pi}{4}\right).$$

1. Représenter ces points et donner leurs coordonnées cartésiennes.
2. Justifier que ces points sont alignés sur une droite passant par O .

Exercice 2 Soient $\vec{u}(2, 1)$ et $\vec{v}(2 - \sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3})$ deux vecteurs du plan. Calculer une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 3 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour norme respectives 4 et 6. Leur produit scalaire est égal à 8. Calculer :

$$\frac{\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})}{(\vec{u} + \vec{v})^2} \quad \frac{2\vec{u} \cdot (-4\vec{v})}{(\vec{u} - \vec{v})^2} \quad \frac{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})}{(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v})}.$$

Exercice 4 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

1. Montrer que :

$$(i) \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

$$(ii) \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

2. En déduire que :

$$(i) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

$$(ii) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

Exercice 5 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

1. Montrer que : $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.
2. En déduire que si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ alors $(\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v})$.

Exercice 6 Théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle rectangle en A . Montrer que :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Exercice 7 Théorème d'Al Kashi

Soit ABC un triangle. Montrer que :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \widehat{BAC}.$$

Exercice 8 Théorèmes de la médiane

Soit ABC un triangle et I le milieu de BC .

1. Démontrer le théorème suivant (dit premier théorème de la médiane) :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}.$$

2. Démontrer le théorème suivant (dit second théorème de la médiane) :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - IB^2.$$

Exercice 9 Calculer une équation cartésienne puis une équation paramétrique de la droite (D) :

1. passante par $A(2, 1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (1, -1)$.
2. passante par $A(-1, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (1, -2)$.
3. passante par $A(1, 2)$ et $B(-2, 3)$.
4. passante par l'origine et parallèle à la droite $D' : x + y - 1 = 0$.
5. passante par $A(1, 1)$ et perpendiculaire à la

$$\text{droite } D' : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10 Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(1, -2)$ et $B(-2, 3)$.

1. Écrire une équation cartésienne de la droite (AB) .
2. Déterminer la distance du point $C(1, 1)$ à la droite (AB) .
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de C sur (AB) sans utiliser la question précédente.
4. Retrouver la distance du point C à la droite (AB) en utilisant la question précédente.

Exercice 11 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère le point $\Omega(1, 2)$. Parmi toutes les droites passant par Ω , déterminer celles qui sont à distance 1 du point $A(-1, 4)$.

Exercice 12 Déterminer le centre et le rayon des cercles d'équations cartésiennes :

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 24 = 0$$

Exercice 13 Soient A, B et C trois points du plan. Montrer que :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

1. En raisonnant géométriquement.
2. En utilisant la bilinéarité et l'antisymétrie du déterminant.

Exercice 14 Dans le plan, on considère un parallélogramme $ABCD$. On note E le projeté orthogonal de C à (AB) . On note F le projeté orthogonal de C à (BD) . Montrer que $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BF} = \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE}$.

Exercice 15 Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer que

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

Exercice 16 Calculer la distance du point A à la droite (D) dans les cas suivants :

1. $A(0,0)$ et (D) passe par $B(5,3)$ et est dirigée par $\vec{u}(1,2)$.
2. $A(1,-1)$ et (D) passe par $B(-1,1)$ et est perpendiculaire à $\vec{n}(2,3)$.
3. $A(4,1)$ et (D) est la droite d'équation cartésienne $x + 2y + 3 = 0$.

Exercice 17 Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les 4 points $A(-1,3)$, $B(-6,-2)$, $C(2,-6)$ et $D(3,1)$.

1. Montrer que $ABCD$ est un trapèze.
2. Calculer les coordonnées de l'intersection de ses diagonales.
3. Montrer que ses diagonales sont perpendiculaires.
4. Calculer l'aire de $ABCD$.

Exercice 18 Soient A, B et C trois points du plan et f l'application qui à tout point M du plan associe :

$$f(M) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

1. Démontrer que f est la fonction nulle.

2. En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 19 Soit un cercle C de rayon r , de centre O et M un point quelconque du plan. Soit enfin une droite (D) passant par M et coupant C en deux points A et B .

1. En notant A' le point diamétralement opposé à A dans le cercle C , démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{MA'}$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = MO^2 - OA^2$ et en déduire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - r^2$.

Exercice 20 Soit un cercle C de diamètre $[AB]$ et de centre O . Soit $C \in C$ se projetant orthogonalement en H sur $[AB]$. Une droite (D) passant par A coupe (CH) en N et C en M .

1. Démontrer que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = AC^2$.

Exercice 21 Soit un rectangle $ABCD$. I et J désignent les milieux de $[AB]$ et $[BC]$.

1. Démontrer que (IC) et (JD) sont perpendiculaires si et seulement si $ABCD$ est un carré.
2. On suppose que $ABCD$ est un carré direct de côté a . Calculer et $\det(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{JD})$ en fonction de a et interpréter le résultat.

Exercice 22 On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère cartésien orthonormal. Soit $A(2,1)$, $B(2,4)$ et $\vec{u}(-1,3)$.

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 3$.
4. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = \det(\overrightarrow{BM}, \vec{u})$.