Feuille d'exercices N°9

Exercice 1 *On munit le plan d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points suivants, définis par leurs coordonnées polaires:*

$$A\left(1, \frac{\pi}{4}\right) \quad B\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right) \quad C\left(2, \frac{\pi}{4}\right).$$

1. *Représenter ces points et donner leurs coordonnées cartésiennes.*
2. *Justifier que ces points sont alignés sur une droite passant par O.*

Exercice 2 *Soient $\vec{u}(2,1)$ et $\vec{v}(2-\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3})$ deux vecteurs du plan. Calculer une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.*

Exercice 3 *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour norme respectives 4 et 6 . Leur produit scalaire est égal à 8 . Calculer :*
$\vec{u} \cdot (\vec{u}+\vec{v})$ $\quad 2\vec{u} \cdot (-4\vec{v})$ $\quad (\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v})$
$(\vec{u}+\vec{v})^2$ $\quad (\vec{u}-\vec{v})^2$ $\quad (2\vec{u}+3\vec{v}) \cdot (3\vec{u}-2\vec{v})$.

Exercice 4 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.*

1. *Montrer que :*

   (i) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

   (ii) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

2. *En déduire que :*

   (i) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

   (ii) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)]$.

Exercice 5 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.*

1. *Montrer que :* $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.
2. *En déduire que si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ alors $(\vec{u}+\vec{v}) \perp (\vec{u}-\vec{v})$.*

Exercice 6 *Théorème de Pythagore*
Soit ABC un triangle rectangle en A. Montrer que :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Exercice 7 *Théorème d'Al Kashi*
Soit ABC un triangle. Montrer que :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos\widehat{BAC}.$$

Exercice 8 *Théorèmes de la médiane*
Soit ABC un triangle et I le milieu de BC.

1. *Démontrer le théorème suivant (dit premier théorème de la médiane) :*

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}.$$

2. *Démontrer le théorème suivant (dit second théorème de la médiane) :*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - IB^2.$$

Exercice 9 *Calculer une équation cartésienne puis une équation paramétrique de la droite (D) :*

1. *passante par $A(2,1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (1,-1)$.*
2. *passante par $A(-1,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (1,-2)$.*
3. *passante par $A(1,2)$ et $B(-2,3)$.*
4. *passante par l'origine et parallèle à la droite $\mathcal{D}' : x+y-1=0$.*
5. *passante par $A(1,1)$ et perpendiculaire à la droite* $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 *Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(1,-2)$ et $B(-2,3)$.*

1. *Écrire une équation cartésienne de la droite (AB).*
2. *Déterminer la distance du point $C(1,1)$ à la droite (AB).*
3. *Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de C sur (AB) sans utiliser la question précedente.*
4. *Retrouver la distance du point C à la droite (AB) en utilisant la question précédente.*

Exercice 11 *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère le point $\Omega(1,2)$. Parmi toutes les droites passant par Ω, déterminer celles qui sont à distance 1 du point $A(-1,4)$.*

Exercice 12 *Déterminer le centre et le rayon des cercles d'équations cartésiennes :*

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 24 = 0$$

Exercice 13 *Soient A, B et C trois points du plan. Montrer que :*

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

1. *En raisonnant géométriquement.*
2. *En utilisant la bilinéarité et l'antisymétrie du déterminant.*

Exercice 14 *Dans le plan, on considère un parallélogramme $ABCD$. On note E le projeté orthogonal de C à (AB). On note F le projeté orthogonal de C à (BD). Montrer que $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BF} = \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE}$.*

Exercice 15 *Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer que*

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

Exercice 16 *Calculer la distance du point A à la droite (D) dans les cas suivants :*

1. *$A(0,0)$ et (D) passe par $B(5,3)$ et est dirigée par $\vec{u}(1,2)$.*
2. *$A(1,-1)$ et (D) passe par $B(-1,1)$ et est perpendiculaire à $\vec{n}(2,3)$.*
3. *$A(4,1)$ et (D) est la droite d'équation cartésienne $x + 2y + 3 = 0$.*

Exercice 17 *Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les 4 points $A(-1,3)$, $B(-6,-2)$, $C(2,-6)$ et $D(3,1)$.*

1. *Montrer que $ABCD$ est un trapèze.*
2. *Calculer les coordonnées de l'intersection de ses diagonales.*
3. *Montrer que ses diagonales sont perpendiculaires.*
4. *Calculer l'aire de $ABCD$.*

Exercice 18 *Soient A, B et C trois points du plan et f l'application qui à tout point M du plan associe :*

$$f(M) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

1. *Démontrer que f est la fonction nulle.*
2. *En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.*

Exercice 19 *Soit un cercle $\mathcal{C}$ de rayon r, de centre O et M un point quelconque du plan. Soit enfin une droite (D) passant par M et coupant $\mathcal{C}$ en deux points A et B.*

1. *En notant A' le point diamétralement opposé à A dans le cercle $\mathcal{C}$, démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$.*
2. *Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = MO^2 - OA^2$ et en déduire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - r^2$.*

Exercice 20 *Soit un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ et de centre O. Soit $C \in \mathcal{C}$ se projetant orthogonalement en H sur $[AB]$. Une droite (D) passant par A coupe (CH) en N et $\mathcal{C}$ en M.*

1. *Démontrer que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.*
2. *En déduire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = AC^2$.*

Exercice 21 *Soit un rectangle $ABCD.I$ et J désignent les milieux de $[AB]$ et $[BC]$.*

1. *Démontrer que (IC) et (JD) sont perpendiculaires si et seulement si $ABCD$ est un carré.*
2. *On suppose que $ABCD$ est un carré direct de côté a. Calculer et $\det(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{JD})$ en fonction de a et interpréter le résultat.*

Exercice 22 *On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère cartésien orthonormal. Soit $A(2,1), B(2,4)$ et $\vec{u}(-1,3)$.*

1. *Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.*
2. *Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.*
3. *Déterminer l'ensemble des points M tels que $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 3$.*
4. *Déterminer l'ensemble des points M tels que $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = \det(\overrightarrow{BM}, \vec{u})$.*