

Feuille d'exercices N°08

Systèmes Linéaires

Exercice 1 Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 4y + z = 0 \\ 4x + 13y + 7z = 0 \\ 7x + 22y + 13z = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \\ 7x + 2y - 3z = 5 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{array} \right.$$

Exercice 2 Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z + t - u = 1 \\ x + 2y + z + u = 3 \end{array} \right.$$

Exercice 3 Discuter, suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions des systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} (m-3)x - 2y + 3z = 0 \\ x + my + 2z = 0 \\ (2-m)z = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} mx + y = m^2 \\ x + my = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + my + m^2z = 0 \\ m^2x + y + mz = 0 \\ mx + m^2y + z = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^3z = -1 \end{array} \right.$$

Exercice 4 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les seconds membres pour que les systèmes suivants aient au moins une solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 5y + 3z = b \\ x + 9z = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x - 3y = a \\ 3x + y = b \\ x + 7y = c \\ 2x + 4y = d \end{array} \right.$$

Exercice 5 Résoudre le système suivant, où x , y et z sont des réels strictement positifs :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^3 y^2 z^6 = 1 \\ x^4 y^5 z^{12} = 2 \\ x^2 y^2 z^5 = 3 \end{array} \right.$$

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \frac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2}.$$

1. Démontrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que

$$\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

2. En déduire la primitive de f sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 7 Déterminer toutes les fonctions de la forme

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$$

telles que $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$.

Exercice 8 1. (a) Soient a_1, a_2, a_3 des complexes donnés, résoudre dans $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 2a_1 \\ x_2 + x_3 &= 2a_2 \\ x_1 + x_3 &= 2a_3 \end{cases}$$

(b) Soient a_1, a_2, a_3 et a_4 des complexes donnés, résoudre dans $\mathbb{C}^4$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 2a_1 \\ x_2 + x_3 &= 2a_2 \\ x_3 + x_4 &= 2a_3 \\ x_1 + x_4 &= 2a_4 \end{cases}$$

2. Étant donnés 3 points du plan M_1, M_2 et M_3 , déterminer un triangle (M_1, M_2, M_3) tel que A_1 soit le milieu de $[M_1M_2]$, A_2 le milieu de $[M_2M_3]$ et A_3 le milieu de $[M_3M_1]$.

Exercice 9 Sans chercher à le résoudre, discuter la nature des solutions du système suivant, en fonction de α, a, b et c :

$$\begin{cases} x - y - \alpha z &= a \\ x + 2y + z &= b \\ x + y - z &= c \end{cases}$$

Exercice 10 Résoudre le système

$$S : \begin{cases} (4-a)x + 4y - 0 = 0 \\ -x + (5-a)y - 3z = 0 \\ x + 7y - (5+a)z = 0 \end{cases}$$

en discutant suivant $a \in \mathbb{R}$.