LYCEE MOHAMMED VI D'EXCELLENCE

Feuille d'exercices N°08
Systèmes Linéaires

Exercice 1 *Résoudre les systèmes linéaires suivants :*

$$\begin{cases} x+y+2z = 3 \\ x+2y+z = 1 \\ 2x+y+z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2z = 1 \\ -y+z = 2 \\ x-2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4y+z=0 \\ 4x+13y+7z=0 \\ 7x+22y+13z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x+2y-3z=5 \\ 3x+2y+z=1 \\ x+2y+3z=-1 \end{cases}$$

Exercice 2 *Résoudre les systèmes suivants :*

$$\begin{cases} x+y+z-3t = 1 \\ 2x+y-z+t = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ x+3y-z=11 \\ 2x+5y-5z=13 \\ x+4y+z=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z+t-u=1 \\ x+2y+z+u=3 \end{cases}$$

Exercice 3 *Discuter, suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions des systèmes suivants :*

$$\begin{cases} (m-3)x-2y+3z=0 \\ x+my+2z=0 \\ (2-m)z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} mx+y=m^2 \\ x+my=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+my+m^2z=0 \\ m^2x+y+mz=0 \\ mx+m^2y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-my+m^2z=m \\ mx-m^2y+mz=1 \\ mx+y-m^3z=-1 \end{cases}$$

Exercice 4 *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les seconds membres pour que les systèmes suivants aient au moins une solution :*

$$\begin{cases} x+2y+3z = a \\ 2x+5y+3z = b \\ x+9z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3y = a \\ 3x+y = b \\ x+7y = c \\ 2x+4y = d \end{cases}$$

Exercice 5 *Résoudre le système suivant, où x, y et z sont des réels strictement positifs :*

$$\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3 \end{cases}$$

Exercice 6 *Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :*

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}.$$

1. *Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que*

$$\forall x \in]1,+\infty[,\quad f(x) = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}+\frac{c}{(x+3)^2}.$$

2. *En déduire la primitive de f sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2.*

Exercice 7 *Déterminer toutes les fonctions de la forme*

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto ax^3+bx^2+cx+d$$

telles que $f(1)=1$ et $f'(1)=1$.

Exercice 8 1. (a) *Soient a_1, a_2, a_3 des complexes donnés, résoudre dans $\mathbb{C}^3$:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ x_1 + x_3 = 2a_3 \end{cases}$$

(b) *Soient a_1, a_2, a_3 et a_4 des complexes donnés, résoudre dans $\mathbb{C}^4$:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ x_3 + x_4 = 2a_3 \\ x_1 + x_4 = 2a_4 \end{cases}$$

2. *Étant donnés 3 points du plan M_1, M_2 et M_3, déterminer un triangle (M_1, M_2, M_3) tel que A_1 soit le milieu de $[M_1M_2]$, A_2 le milieu de $[M_2M_3]$ et A_3 le milieu de $[M_3M_1]$.*

Exercice 9 *Sans chercher à le résoudre, discuter la nature des solutions du système suivant, en fonction de α, a, b et c :*

$$\begin{cases} x - y - \alpha z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$$

Exercice 10 *Résoudre le système*

$$\mathcal{S} : \begin{cases} (4-a)x + 4y - 0 = 0 \\ -x + (5-a)y - 3z = 0 \\ x + 7y - (5+a)z = 0 \end{cases}$$

en discutant suivant $a \in \mathbb{R}$.