Feuille d'exercices N°07
Équations Différentielles

Exercice 1 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :*

$$y' + 2y = x^2 \qquad (x^2+1)^2 y' + 2x(x^2+1)y = 1$$

$$y' - y = (x+1)e^x \qquad y' + y = x - e^x + \cos x$$

$$y' + y = 2\sin x \qquad (x^2+1)y' - xy = (x^2+1)^{3/2}$$

Exercice 2 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :*

$$y' + \tanh(t)y = t\tanh(t)$$

Trouver l'unique solution f vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

Exercice 3 *Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés*

$(2+\cos x)y' + \sin(x)y = (2+\cos x)\sin x$ *sur* $\mathbb{R}$

$(1+\cos^2 x)y' - \sin 2x.y = \cos x$ *sur* $\mathbb{R}$

$y'\sin x - y\cos x + 1 = 0$ *sur* $]0,\pi[$,

$(\sin x)^3 y' = 2(\cos x)y$ *sur* $]0,\pi[$.

Exercice 4 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

$y' + \tan(t)y = \sin(2t), y(0) = 1$ *sur* $]-\pi/2, \pi/2[$;

$(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1, y(1) = 1$ *sur* $]-1, +\infty[$

Indication *: on pourra rechercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme.*

Exercice 5 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :*

$$y'' + y = 0 \qquad y'' + 2y' + y = e^x$$

$$y'' + y = 2\cos^2 x \qquad y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$y'' + y' - 2y = e^x \qquad y'' + y = \sinh x$$

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \qquad y'' + 2y' + 2y = \sin x$$

$$y'' - 2y' + y = 2\cosh x$$

Exercice 6 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

$y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$;

$y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{x}$;

$y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^x + e^{3x}$;

$y'' - 4y' + 3y = x^2e^x + xe^{2x}\cos x$;

$y'' - 2y' + 5y = -4xe^{-x}\cos(x) + 7e^{-x}\sin x - 4e^x\sin(2x)$.

Exercice 7 *Trouver les solutions de l'équation différentielle*

$$y'' + y = \cos(x)$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 8 *On souhaite déterminer les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que*

$$\forall x \in [0,1],\ f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Soit f une telle fonction.

1. *Observer que f est une solution d'une équation différentielle de la forme $(E) : y' + y = c$, avec $c \in \mathbb{R}$ à déterminer.*
2. *Résoudre (E). En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \lambda e^{-x} + c.$$

3. *Montrer que* $\lambda = -\dfrac{ec}{1+e}$.

4. *Conclure.*

Exercice 9 *On veut déterminer les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivables telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x.$$

Soit f *une telle fonction.*

1. *Justifier que* f *est deux fois dérivable.*

2. *Montrer que* f *est solution de l'équation différentielle* $(E) : y'' + y = 2\cosh x$.

3. *Résoudre* (E), *puis en déduire l'expression de* f.

4. *Conclure.*

Exercice 10 *On considère l'équation différentielle* $(E) : x^2y' - y = 0$.

1. *Résoudre l'équation* (E) *sur les intervalles* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\mathbb{R}_-^*$.

2. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une solution de l'équation* (E).

   (a) *Montrer qu'il existe* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *tel que :*
   $\forall x > 0,\ f(x) = \lambda e^{-1/x}$ *et*
   $\forall x < 0,\ f(x) = \mu e^{-1/x}$

   (b) *Que vaut* $f(0)$ *?*

   (c) *Dire pourquoi* f *est continue en* 0.

   (d) *Montrer que* $\mu = 0$.

   (e) *Déduire l'expression de* $f(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

3. *Réciproquement, vérifier que la fonction* f *trouvée en 2.e est solution de* (E). *Puis Conclure.*

Exercice 11 *Étudier l'existence de solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation suivante :*

$$x^3y' - x^2y = 1$$

Exercice 12 *Le but de cet exercice est de trouver les applications* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *dérivables et vérifiant :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y) (\bigstar)$$

1. *Vérifier que la fonction nulle vérifie* $(\bigstar)$.

2. *Désormais, soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une application* ***non nulle*** *dérivable et vérifiant* $(\bigstar)$.

   (a) *Justifier qu'il existe* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x_0) \neq 0$.

   (b) *Montrer que* $f(0) = 1$.

   (c) *Montrer que* f *est une solution d'une équation différentielle de la forme* $y' - ay = 0$, *avec* $a \in \mathbb{C}$ *à déterminer.*

   (d) *En déduire l'expression de* f.

3. *Conclure.*

Exercice 13 *Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions*

$$y(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-x} \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Exercice 14 *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$(E) : t^2y'' + 3ty' - 3y = t + 1, t \in \mathbb{R}_+^*$$

1. *Soit* $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *une fonction deux fois dérivable. On pose* $z(x) = y(\exp(x))$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Démontrer que* z *est deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$.

2. *Montrer que* y *est solution de* (E) *si et seulement si* z *vérifie :*

$$(F) : z'' + 2z' - 3z = e^x + 1, x \in \mathbb{R}$$

3. *Résoudre* (F) *sur* $\mathbb{R}$.

4. *Résoudre* (E) *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 15 *On considère une équation différentielle* (E) *de la forme :*

$$(E) : y'' + y = f(x)$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue.*
On note (H) *l'équation homogène associée à* (E).

1. *Résoudre* (H) *(on donnera les solutions à valeurs réelles).*

2. *Résoudre* (E) *lorsque* f *est définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x.$$

3. *Résoudre* (E) *lorsque* f *est définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x) + 2\sin(x).$$

4. *Pour tout réel* x, *on pose :*

- $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt$,
- $H(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt$,
- $F(x) = -\cos(x)G(x) + \sin(x)H(x)$.

Montrer que G et H sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et exprimer leurs dérivées en fonction de f.

5. *Démontrer que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer F' et F'' en fonction de G et H.*
6. *Prouver que F est solution de (E).*
7. *Dans la suite, on suppose que f est 2π-périodique. Calculer les dérivées des fonctions $x \mapsto G(x+2\pi)-G(x)$ et $x \mapsto H(x+2\pi)-H(x)$.*
8. *À quelle condition nécessaire et suffisante sur $G(2\pi)$ et $H(2\pi)$ la fonction F est-elle 2π-périodique ?*
9. *Vérifier ce résultat sur la question 3.*