

Feuille d'exercices N°06

Primitives et Calcul Intégral

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 |2x-1| dx \text{ et } \int_0^2 \max(e^x, 2) dx$$

Exercice 2 Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$t \mapsto \frac{1}{t \ln^4 t} \quad t \mapsto \frac{\ln(\ln t)}{t} \quad t \mapsto \frac{1}{t + t \ln^2 t}$$

$$t \mapsto \frac{1}{t + \sqrt{t}} \quad t \mapsto t e^{t^2} \quad t \mapsto \frac{1}{1 + e^t}$$

Exercice 3 (Changement de variables) En effectuant des changement de variables, calculer une primitive de $x \mapsto x \sin(x^2)$ et de $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{\tan x}}$

Exercice 4 (Règle de Bioche)

• **Méthode 1 : Primitive de**

$$x \mapsto \cos^p(x) \sin^q(x) :$$

- (i) Si p et q sont impaires, on considère $t = \cos(2x)$.
- (ii) Si p est pair et q est impair, on considère $t = \cos(x)$.
- (iii) Si q est pair et p est impair, on considère $t = \sin(x)$.

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \cos^5(x) \sin^6(x) \quad x \mapsto \sin^2(x) \cos^2(x) \\ x \mapsto \cos^3(x)$$

• **Méthode 2 : Primitive d'une fraction rationnelle en $(\cos(x), \sin(x))$:** $\int \phi(x) dx$

- (i) Si $\phi(x)dx$ est invariante si on remplace x par $-x$, on pose $t = \cos(x)$.
- (ii) Si $\phi(x)dx$ est in invariante si on rempalce x par $\pi - x$, on pose $t = \sin(x)$.

(iii) Si $\phi(x)dx$ est invariante si on remplace x par $\pi + x$, on pose $t = \tan(x)$.

(iv) Sinon, on pose $t = \tan(x/2)$.

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{1}{1 + \sin(x)} \text{ et } x \mapsto \frac{\sin(x)}{2 \cos(x) - \sin^2(x)}$$

Exercice 5 Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$t \mapsto t \arctan t \quad t \mapsto t \sin 2t \quad t \mapsto \arccos t$$

$$t \mapsto \frac{t}{\cos^2 t} \quad t \mapsto (1+t)e^t \cos t \quad t \mapsto \ln(1+t^2)$$

$$t \mapsto \arcsin t \quad t \mapsto \frac{1}{t-z} z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad t \mapsto t^2 e^t$$

$$t \mapsto t \ln(1+t) \quad t \mapsto t \arctan(t)$$

Exercice 6 Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$t \mapsto \frac{1}{t^2 - 3t + 2} \quad t \mapsto \frac{1}{t^2 + t + 1}$$

$$t \mapsto \frac{t}{t^2 + t + 1} \quad t \mapsto \frac{1}{t^2 - 2t + 1}$$

Exercice 7 1. Déterminer des primitives de la fonction $x \mapsto x e^{(-1+i)x}$.

2. En déduire les primitives de la fonction $x \mapsto x e^{-x} \sin x$.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Justifier que la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t) dt$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.

Exercice 9 Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t) g(t) dt.$$

Montrer que f est dérivable et que

$$f'(x) = \int_0^x \cos(t-x) g(t) dt.$$

Exercice 10 Soient p et q deux entiers naturels. On pose

$$I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx.$$

1. Montrer que $I(q, p) = I(p, q)$.
2. Exprimer $I(p+1, q)$ à l'aide de $I(p, q+1)$.
3. Calculer $I(0, q)$.
4. En déduire $I(p, q)$.

Exercice 11 1. Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.

2. En effectuant le changement de variable $u = \cos x$, calculer l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{3 - \sin^2 x + 2 \cos x} dx.$$

Exercice 12 On considère les intégrales :

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx \text{ et } J = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx.$$

1. Rechercher des réels a , b et c tels que :

$$\frac{u}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{a}{1+u} + \frac{bu+c}{1+u^2}.$$

2. En déduire $\int_0^1 \frac{u}{(1+u)(1+u^2)} du$.
3. Calculer I en effectuant le changement de variable $u = \tan x$.
4. Calculer $I+J$ et $I-J$. Retrouver la valeur de I .

Exercice 13 Soient $a > 0$ et f une fonction continue sur $[-a, a]$.

1. Montrer que :

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a f(-t) dt.$$

2. On suppose que f est paire. Déduire que :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

3. On suppose que f est impaire. Déduire que :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0.$$

Exercice 14 On considère la fonction H définie par

$$H(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de H .
2. Démontrer que H est dérivable sur $\mathcal{D}$ et déterminer H' .
3. Soit $x > 1$. Montrer que : $e^x \ln x \leq H(x)$.
4. En déduire la limite de H en $+\infty$.
5. Préciser la nature de la branche infinie de H au voisinage de $+\infty$.

Exercice 15 Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \text{ et } v_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$$

1. Montrer que (u_n) est une suite décroissante.
2. En déduire que (u_n) est une suite convergente.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
4. En déduire la limite de la suite (u_n) .
5. Montrer que (v_n) tend vers 0.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} + \frac{1}{n+1} v_n.$$

7. En déduire la limite de la suite (nu_n) .

Exercice 16 Calculer l'intégrale

$$I = \int_{1/2}^2 \frac{1}{x} \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \ln x dx.$$

Indication : on pourra poser $u = \frac{1}{x}$.

Exercice 17 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0.$$

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Exercice 19 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et telle que :

$$\forall x \in [a, b], f(a + b - x) = f(x).$$

1. En utilisant le changement de variable $t = a + b - x$, montrer que :

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

2. En déduire la valeur de $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

Exercice 20 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx.$$

1. Calculer I_0 .
2. Calculer $I_0 + I_1$. En déduire I_1 .
 - a. Quel est le signe de I_n ?
 - b. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 - c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$.
 - d. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq \frac{1}{2n+2}$.
 - e. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.
 - f. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2(-1)^{n-1} I_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) - \ln 2.$$

- g. En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx.$$

- b. Établir les inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \leq \frac{1}{2n+4}.$$

- c. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$.

4. À l'aide des questions précédentes, donner un équivalent de

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2.$$

Quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 21 Intégrales de Wallis
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt.$$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. En exploitant le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$, montrer que $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$.
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
5. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

6. En déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

7. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

8. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}.$$

9. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n^2 = \frac{\pi}{2}$.