

Feuille d'exercices N°5

Calcul Algébrique

Exercice 1 Linéariser $\cos^5(x)$.

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$(i) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$$

$$(ii) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

$$(iii) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$(iv) \sum_{k=1}^n k.k!$$

Exercice 3 Calculer les sommes suivantes :

$$(i) \sum_{i=0}^{23} \binom{23}{i} (-1)^i 2^{23-i}$$

$$(ii) \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i}$$

$$(iii) \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n+1}{i}$$

Exercice 4 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $b \neq 0$.

Calculer $\sum_{k=0}^n a^k 2^{3k} b^{-k}$ et $\sum_{k=2}^{n^2} (1 - a^2)^{2k+1}$.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$P_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} \text{ et } I_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k}.$$

Calculer $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$. En déduire P_n et I_n .

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}.$$

1. À l'aide du changement d'indice $\ell = 2n+1-k$, déterminer une nouvelle expression de S_n .
2. En déduire la valeur de $2S_n$ puis celle de S_n .

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$1. \text{ Calculer } S_n = \sum_{k=1}^n ((k+1)^5 - k^5).$$

$$2. \text{ En déduire l'expression de } \sum_{k=1}^n k^4.$$

Exercice 8 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer que :

$$\left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}.$$

Exercice 9 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$c_n = \sum_{k=0}^n k \cos(kx) \text{ et } s_n = \sum_{k=0}^n k \sin(kx).$$

$$(a) \text{ En utilisant l'identité } \sum_{l=1}^k 1 = k, \text{ calculer la}$$

$$\text{somme } \sum_{k=1}^n k z^k, \text{ où } z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

(b) Retrouver ce résultat en calculant

$$(z - 1) \sum_{k=1}^n k z^k.$$

(c) Calculer c_n et s_n .

Exercice 10 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$(i) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a + kb)$$

$$(ii) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(a + kb).$$

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes:

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n} ij \sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{i+j} \sum_{0 \leq i, j \leq n} \max(i, j) \\ \sum_{0 \leq i, j \leq n} \min(i, j) \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1} \sum_{0 \leq i, j \leq n} |i - j| \\ \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^j \binom{j}{i} \sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{2i-j}$$

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. Vérifier que, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$S_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Observer que cette inégalité est encore vraie pour $n = 1$.

Exercice 13 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$.

En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 14 1. Calculer, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k}.$$

2. Calculer pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, la somme

$$\sum_{i=0}^n \left(\prod_{j=1}^p (i+j) \right).$$

Exercice 15 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Prouver que :

$$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$S_n = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{1}{k^2 - k + 1}\right).$$

3. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 16 Le but de cet exercice est d'introduire une méthode pour calculer des sommes en utilisant les fonctions à une variable réelle.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Notons $S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k$.

Considérons $f(x) = (1+x)^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Justifier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée sur $\mathbb{R}$.

- (b) D'autre part, en utilisant la formule de binôme de Newton, montrer que

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}.$$

- (c) En déduire la valeur de S_n .