

Feuille d'exercices N°4

Logique et Raisonnement

Exercice 1 Donner la valeur logique (vraie ou fausse) de chacune des assertions suivante en justifiant votre réponse :

1. $(1 > 0)$ et (1 est pair) .
2. $\left(\frac{1}{2} \in \mathbb{N}\right)$ ou $(1 + 0 = 1)$.
3. $(0 \times 1 = 0) \implies (0 = 1)$.
4. $(-1 = 1) \iff (0 > 0)$.

Exercice 2 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle est la négation des assertions suivantes ?

- (a) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.
- (b) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1$ ou $f(x) \leq -1$.
- (c) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \implies x \geq 0$.
- (d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \leq f(x) \leq 2x + y$.
- (e) $\forall x \in \mathbb{R}, (\exists y \in \mathbb{R}, f(x) \geq y) \implies x \leq 0$.
- (f) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq \alpha \implies |f(x)| \leq \varepsilon$.

Exercice 3 Écrire avec des symboles mathématiques les assertions suivantes.

1. Il existe un nombre complexe de module un.
2. On peut trouver un entier naturel plus petit que tous les nombre réel.
3. Pour qu'un nombre réel soit supérieur à un il faut qu'il soit positif.
4. Pour qu'un nombre complexe soit réel, il suffit que son argument soit congrus à zéro modulo 2π .
5. Pour qu'un entier naturel soit pair, il faut et il suffit que son carré soit pair.
6. Il existe un rationnel compris entre $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.
7. Si la somme de deux entiers naturels est nulle, alors ces deux entiers naturels sont nuls.
8. Certains réels sont supérieurs à leur carré.
9. Le nombre 3 n'est le sinus d'aucun nombre réel.

Exercice 4 Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Écrire au moyen de quantificateurs les propositions suivantes :

1. f est croissante.
2. f s'annule.
3. f est périodique.
4. f prend au moins une fois la valeur 1.
5. f est majorée.
6. f est bornée.
7. f est paire.
8. f est nulle.

Exercice 5 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 4$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 2, u_1 = 5$ et pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = 2^n + 3^n$.

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n + 2$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{5^n - 1}{2}$.

Exercice 6 Soit $\mathcal{P}$ une assertion dépendante d'un paramètre réel.

1. On suppose que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+, \mathcal{P}(x))$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, \text{non}(\mathcal{P}(x)))$.

Que peut-on dire de la véracité des assertions suivantes ?

(a) $\mathcal{P}(4)$.

(d) $\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{P}(x^2)$.

(g) $\forall x \in [-3, +\infty[, \mathcal{P}(x)$.

(b) $\mathcal{P}(-1)$.

(e) $\forall x \in \mathbb{R}^-, \mathcal{P}(-x)$.

(c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \mathcal{P}(\lambda)$.

(f) $\forall x \in [1, +\infty[, \mathcal{P}(x)$.

(h) $\exists x \in \mathbb{R}^+, \mathcal{P}(x)$.

2. On suppose que : $\exists x \in \mathbb{R}^+, \mathcal{P}(x)$. Que peut-on dire de la véracité des assertions suivantes ?

(a) $\mathcal{P}(3)$.

(c) $\exists x \in [1, +\infty[, \mathcal{P}(x)$.

(e) $\exists x \in \mathbb{R}^+, \mathcal{P}(\sqrt{x})$.

(b) $\exists x \in \mathbb{R}, \mathcal{P}(x)$.

(d) $\exists x \in \mathbb{R}, \mathcal{P}(x^2)$.

(f) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \mathcal{P}(x)$.

Exercice 7 1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1 \implies |x - 2| \geq 1$.

2. Montrer que l'assertion suivante est fausse : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \neq n^2$.

Exercice 8 Démontrer l'assertion suivante proprement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x = 0 \iff \forall y \in \mathbb{R}, xy = 0).$$

Exercice 9 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 10 On considère l'assertion

$$(\mathcal{P}) : \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (\forall \varepsilon > 0, a \leq b + \varepsilon) \implies a \leq b.$$

Écrire sa négation et démontrer $(\mathcal{P})$.

Exercice 11 Démontrer l'implication suivante :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a \neq -2 \text{ et } b \neq -2) \implies ab + 2a + 2b \neq -4.$$

Exercice 12 Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par :

$$F_0 = F_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrer que : $\forall n > 1, F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(n + m) = f(n) + f(m), \text{ pour tous } m, n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$.

Exercice 14 Montrer qu'il existe un $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tel que $(\sqrt{2})^r \in \mathbb{Q}$.

(Indication: Penser à un raisonnement par disjonction des cas)