

Feuille d'exercices N°03

Fonctions usuelles

Exercice 1 Calculer :

1. $\arccos(\cos(25\pi))$
2. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{39\pi}{2}\right)\right)$
3. $\arccos\left(\cos\left(\frac{35\pi}{4}\right)\right)$
4. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{34\pi}{3}\right)\right)$
5. $\arctan\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

Exercice 2 Soit $A = \arctan(2) + \arctan(3)$.

1. Montrer que $A \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.
2. Calculer $\tan(A)$.
3. En déduire que $A = \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 3 1. Montrer que :

$$\forall x \in [-1, 1], \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = \cos(\arccos(x)).$$

2. En déduire : $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.
3. Retrouver le résultat précédent en étudiant la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \arccos(x) + \arcsin(x)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante, d'inconnu $x \in \mathbb{R}$:

$$\arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \arccos\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 4 1. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

2. En effectuant des encadrements de $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$, montrer que $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arccos\left(\frac{1}{4}\right) \in [0, \pi]$.
3. En utilisant les questions précédentes, résoudre l'équation : $\arccos(x) = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$.

Exercice 5 1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$.
3. Étudier la nature la branche infinie de $f : x \mapsto x \arctan x$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 6 Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan(x) + 2 \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 7 On appelle l'argument principal d'un nombre complexe non nul z l'unique argument de z dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Le but de cet exercice est de calculer l'argument principal d'un nombre complexe non nul en utilisant la fonction $\arctan$.

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, α l'argument principal de z et $r = |z|$.

1. Exprimer x et y en fonction de r et α .
2. Déterminer α si $x = 0$.
Dans la suite de cette question on suppose que $x \neq 0$.
3. Montrer que : $\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$.
4. Montrer que :

- (a) si $x > 0$, alors $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;
- (b) si $x < 0$ et $y \geq 0$, alors $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$;
- (c) si $x < 0$ et $y < 0$, alors $\alpha \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$.

5. En déduire que :

$$\alpha = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}.$$

Exercice 8 Exprimer $\cosh(x+y)$ et $\sinh(x+y)$ en fonction de $\cosh(x)$, $\cosh(y)$, $\sinh(x)$, $\sinh(y)$.

Exercice 9 Simplifier les expressions suivantes (il ne doit plus figurer de fonctions trigonométriques directes et réciproques) :

$$f(x) = \cos(\arctan x) \text{ et } g(x) = \sin(\arctan x).$$

Exercice 10 Déterminer les domaines de définition des fonctions $f : x \mapsto \cos(\arccos(x))$ et $g : x \mapsto \arccos(\cos(x))$.

Exercice 11 On pose :

$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .

2. Montrer que $\varphi : t \mapsto \tan(t)$ est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle à déterminer.
3. Pour cette question et les deux suivantes, on fixe un réel $x \in]-1, 1]$. Justifier qu'il existe un unique $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\theta) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
4. Montrer que $x = \cos(2\theta)$.
5. Donner une expression simplifiée de $f(x)$.
6. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et calculer f' .
7. Retrouver alors l'expression simplifiée de f .

Exercice 12 Formule de Méchin

1. Montrer que : $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Calculer $\tan\left(2 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)$, puis $\tan\left(4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)$.
3. En déduire l'égalité suivante :

$$4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 13 Soit $f : x \mapsto \arccos(\cos(x)) - \arccos(\cos(2x))$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer le domaine d'étude de f .
3. Simplifier $f(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Simplifier $f(x)$ pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
5. Tracer le graphe de f .

Exercice 14 1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

2. Montrer que : $\forall x \geq 1, \operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

3. Montrer que : $\forall x \in]-1, 1[, \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 15 On pose $f(x) = \arctan(\sinh x) + \arccos(\tanh x)$.

1. Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f .
2. Montrer que f' est nulle sur son domaine de dérivabilité.
3. Montrer que $\arctan\left(\frac{5}{12}\right) + \arccos\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 16 Résoudre les équations suivantes:

$$\arccos x = 2 \arccos \frac{3}{4}$$

$$\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{4}$$

$$\arcsin x = \arcsin \frac{2}{5} + \arcsin \frac{3}{5}$$

Exercice 17 On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3) = \frac{5\pi}{4}.$$

1. Montrer que : $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.
2. En déduire que $x = 5$ est solution.
3. Étudier la monotonie de la fonction $f : x \mapsto \arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3)$. Conclure.

Exercice 18 Soient a et b deux nombres réels positifs.

1. Prouver qu'il existe un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan(c).$$

2. Exprimer c en fonction de a et b .