

Feuille d'exercices N°25

Représentations Matricielles

Exercice 1 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\text{rg}(A)$.
2. Que peut-on déduire de l'inversibilité de A ?

Exercice 2 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\text{rg}(A)$.
2. Que peut-on déduire de l'inversibilité de A ?

Exercice 3 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de A_λ selon les valeurs de λ .
2. Pour quelles valeurs de λ la matrice A_λ est inversible ?

Exercice 4 On pose $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{u}_3 = (0, 1, 1)$.

1. Calculer la matrice A de la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $\text{rg}(\mathcal{F})$.
3. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre? génératrice de $\mathbb{R}^3$? base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5 Soient $u = (1, 0, 2)$, $v = (1, 1, 2)$, $w = (2, 2, 2)$ et $t = (1, 2, 2)$.

1. Calculer la matrice A de la famille $\mathcal{F} = (u, v, w, t)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $\text{rg}(\mathcal{F})$.
3. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre? génératrice de $\mathbb{R}^3$? base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 6 On pose : $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X^2 + X + 1$ et $P_3 = X^2 + X$.

1. Calculer la matrice M de la famille $\mathcal{C} = (P_1, P_2, P_3)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{K}_2[X]$.
2. Calculer $\text{rg}(\mathcal{C})$.
3. Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
4. Donner la matrice de passe P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
5. Déterminer la matrice de passe Q de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 7 On pose:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice M de la famille $\mathcal{F} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

2. Calculer $\text{rg}(\mathcal{F})$.

3. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre? génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$? base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?

Exercice 8 Soit $t \in \mathbb{R}$.

On pose : $u_1 = (1, 1, t)$, $u_2 = (1, t, 1)$ et $u_3 = (t, 1, 1)$.

1. Calculer la matrice A de la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $\text{rg}(\mathcal{F})$ en distinguant les cas suivant les valeurs de t .
3. Dire pour quelles valeurs de t la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice 9 Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \varphi(P) = P(X + 1).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Écrire la matrice A de l'endomorphisme φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$. On exprimera les coefficients de A en fonction des coefficients binomiaux.
3. Montrer que φ est un automorphisme et calculer $\varphi^{-1}(P)$ pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Déduire que A est inversible et donner son inverse. On exprimera les coefficients de A^{-1} en fonction des coefficients binomiaux.

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - z, x + y + z, x - y - z).$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer la matrice A de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
2. Calculer $\text{rg}(f)$.
3. f est-elle injective? surjective? bijective?
4. Sans calcul, justifier que

$$F = \{(x + z, y - z, x + y + z, x - y - z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

est un sev de $\mathbb{R}^4$ et préciser sa dimension.

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme définie par

$$f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y).$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Calculer $\text{rg}(f)$.
3. f est-elle injective? surjective? bijective?
4. Sans calcul, justifier que

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = z - x = x - y = 0\}$$

est un sev de $\mathbb{R}^3$ et préciser sa dimension.

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z, t) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t).$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice A de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
2. Calculer $\text{rg}(f)$.
3. f est-elle injective? surjective? bijective?

Exercice 13 Soient a, b, c des réels deux à deux distincts. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(P) = (P(a), P(b), P(c)).$$

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que φ est un isomorphisme.
2. Déterminer la matrice A de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
3. Montrer que A est inversible.

Exercice 14 On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ l'application définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \quad f(M) = AM - MB.$$

On note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Déterminer la matrice Φ de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Calculer $\text{rg}(f)$.
4. f est-elle injective? surjective? bijective?

Exercice 15 On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ l'application définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \quad \varphi(M) = AM - MA.$$

On note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Déterminer la matrice Φ de φ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Calculer $\text{rg}(\varphi)$.
4. Justifier que $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) : AM = MA\}$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et préciser sa dimension.

Exercice 16 Soient E un ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, F et G deux sev supplémentaires de E et $p = \dim F$. On considère une base $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de G .

1. Justifier que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E . Comment appelle-t-on cette base?
2. Donner la matrice de la projection p sur F parallèlement à G dans la base $\mathcal{B}$.
3. Donner la matrice de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 17 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme définie par

$$f(x, y, z) = (y + z, x - z, x - y).$$

On pose : $F = \ker(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $G = \ker(f + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner la matrice de $\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Donner la matrices A de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déduire les matrices de $f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et de $f + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ dans la base $\mathcal{B}$.

4. Donner une base de F et préciser sa dimension.
5. Donner une base de G et préciser sa dimension.
6. Montrer que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
7. Dédire que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
8. Donner une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
9. Donner la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
10. Calculer la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
11. Justifier que P est inversible puis calculer son inverse.
12. Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
13. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 .
2. Établir que f est projecteur.
3. Justifier que $\mathbb{R}^3 = \text{Im } f \oplus \ker f$.
4. Déterminer une base de $\ker f$ et préciser sa dimension.
5. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
6. Donner une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = \text{Im } f \oplus \ker f$.
7. Donner la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 19 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$u(x, y, z) = (2x - y, y - z, -z + 2x).$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$.
2. Prouver que la famille $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ définie par

$$f_1 = e_2 - e_3, f_2 = -e_1 + e_3, f_3 = e_1 + e_2$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Calculer la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
4. Justifier que P est inversible puis calculer son inverse.
5. Dédire la matrice M' de u dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) = P + P'.$$

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Prouver que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Montrer que M est inversible et calculer son inverse.
4. Établir que f est un automorphisme.
5. En déduire qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant :

$$P + P' = X^2 + X + 1.$$

Exercice 21 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille de E définie par

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3, \varepsilon_2 = e_1 - e_3 \text{ et } \varepsilon_3 = e_1 - e_2.$$

1. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.
2. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E .
3. Former la matrice D de f dans $\mathcal{B}'$.
4. Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1} .
5. Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
6. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. On considère les trois suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n \\ y_{n+1} = -2x_n + y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n + 3z_n \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_{n+1} en fonction de X_n et A .
- (b) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n en fonction de X_0 et A .
- (c) Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de x_n , y_n et z_n en fonction de n .

Exercice 22 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension 3 vérifiant

$$f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

1. Justifier qu'il $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x))$ est une base de E .
3. Déterminer la matrice de f dans cette base.
4. L'endomorphisme f est-il un automorphisme ?

Exercice 23 Soient E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1. Justifier que $\dim(\text{Im } f) \geq 1$.
2. Montrer que $\text{Im } f \subset \ker f$.
3. En déduire que : $\dim(\text{Im } f) = 1$ et $\dim(\ker f) = 2$.
4. Justifier qu'il existe $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$.
5. Établir l'existence de $v \in \ker f$ de sorte que $(f(u), v)$ soit base de $\ker f$.
6. Démontrer que $\mathcal{B} = (u, f(u), v)$ est une base de E .
7. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 24 Soient $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right].$$

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On pose enfin $\mathcal{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Vérifier que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Justifier que A est inversible. Que peut-on déduire concernant f ?
4. Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

6. Justifier que P est inversible et calculer son inverse.
7. Écrire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
8. Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} .
9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
10. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neuf coefficients de A^n .
11. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c .
12. En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt.$$

Exercice 25 D'après CCINP 2023 On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \end{cases}.$$

On note alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. On introduit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.

On considère les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$: $b_1 = (0, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, 0)$ et $b_3 = (0, 0, 1)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ définie par

$$b_1 = (0, 1, 1), b_2 = (1, 1, 0), b_3 = (0, 0, 1)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$. Déterminer P et vérifier que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer une relation entre A, P, T, P^{-1} .
5. On note $T = N + D$, où D est une matrice diagonale et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer D et vérifier que N et D commutent.
6. Que vaut N^n pour un entier $n \geq 2$?
7. Déduire de ce qui précède une expression de T^n . On donnera chacun de ses coefficients.
8. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre X_{n+1} , A et X_n .
9. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n en fonction de A, n et X_0 .
10. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de T^n, P et P^{-1} . Démontrer cette relation par récurrence.
11. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n, v_n et de w_n en fonction de n .