

Feuille d'exercices N°24

Applications Linéaires

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - z, x + y + z, x - y - z).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. f est-elle injective?
3. Déterminer $\text{rg } f$.
4. f est-elle surjective?
5. Donner une base de $\text{Im}(f)$.
6. Déterminer un système d'équations définissant $\text{Im}(f)$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Donner une base de $\ker f$ et sa dimension.
3. f est-elle injective? surjective? bijective?
4. Déterminer le rang de f .
5. Donner une base de $\text{Im}(f)$.
6. Déterminer un système d'équations définissant $\text{Im}(f)$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer la dimension de $\ker(f)$.
3. f est-elle injective?
4. Déterminer le rang de f . Est-elle surjective?
5. Donner une base de $\text{Im}(f)$.
6. Déterminer un système d'équations définissant $\text{Im}(f)$.

Exercice 4 On pose $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $\varphi : E \rightarrow E$ l'application définie par : $\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Déterminer une base du noyau de φ .

Exercice 5 1. Montrer que $(u = (1, 0, 0), v = (1, 1, 0), w = (1, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(u) = (0, 1), f(v) = (1, 0) \text{ et } f(w) = (1, 1).$$

3. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Exprimer $f(x, y, z)$.
4. Déterminer le noyau de f en précisant sa dimension.
5. Établir que $\Im f = \mathbb{R}^2$.
6. f est-elle injective? surjective? bijective?

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On pose

$$u_1 = e_2 + 2e_3, u_2 = e_3 - e_1 \text{ et } u_3 = e_1 + 2e_2.$$

1. Montrer que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E .

2. Justifier qu'il existe un unique endomorphisme f de E vérifiant $f(u_1) = 2e_1 + 3e_2 + e_3, f(u_2) = -4e_2 - 2e_3$ et $f(u_3) = 4e_1 + 12e_2 + 5e_3$.
3. Déterminer une base de $\ker f$ et sa dimension.
4. Déterminer une base de $\text{Im } f$ et sa dimension.

Exercice 7 Soient a, b, c des réels deux à deux distincts. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(P) = (P(a), P(b), P(c)).$$

On note $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que φ est isomorphisme.
2. On pose $L_1 = \varphi^{-1}(e_1), L_2 = \varphi^{-1}(e_2)$ et $L_3 = \varphi^{-1}(e_3)$. Justifier que $\mathcal{B} = (L_1, L_2, L_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.
4. Déterminer l'expression de L_1, L_2 et L_3 .

Exercice 8 Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ définie par

$$\varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$$

est un isomorphisme.

Exercice 9 Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.

1. Montrer que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Montrer que $\mathcal{I} \cap \mathcal{P} = \{0_E\}$.
3. Soit $f \in E$.

(a) Vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

(b) Étudier la parité des fonctions $f_1 : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $f_2 : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

4. En déduire que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ sont supplémentaires.
5. Déterminer l'expression de la projection p sur $\mathcal{I}$ parallèlement à $\mathcal{P}$ puis de la symétrie s par rapport à $\mathcal{I}$ parallèlement à $\mathcal{P}$.
6. Calculer $p(\exp)$.

Exercice 10 On pose :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\} \text{ et } G = \text{Vect}((-1, 2, 1)).$$

1. Montrer que F est un plan vectoriel et donner une base de F .
2. Montrer que G est une droite vectorielle et donner une base de G .
3. En déduire que F et G sont supplémentaires.
4. Donner une base adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

5. Déterminer l'expression de la projection p sur F parallèlement à G puis de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G .

Exercice 11 On note :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z = y + t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y + z = 0\}.$$

1. Prouver que F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de F .
2. Prouver que G est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de G .
3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
4. Donner une base adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.
5. Donner les expressions analytiques de p et s , respectivement projecteur sur F parallèlement à G et symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = P(X) + P(X+1)$ est un automorphisme.
2. Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ unique tel que

$$P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n.$$

3. Calculer $\varphi(P'_{n+1})$, puis trouver une relation entre P_n et P'_{n+1} .

Exercice 13 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n . Montrer que $(\text{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ est liée.

Exercice 14 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_E$.
2. Montrer que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre de E .
3. En déduire que $\dim E \geq 3$.

Exercice 15 Soient E un ev et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. L'application linéaire f est-elle un automorphisme ?
2. Soit $x \in \ker(\text{Id}_E - f)$. Démontrer que $f^k(x) = x$ pour tout entier $k \geq 1$. En déduire que $\text{Id}_E - f$ est injectif.
3. En utilisant les règles de calcul dans $\mathcal{L}(E)$ simplifier les expressions

$$(\text{Id}_E - f) \circ (\text{Id}_E + f + f^2 + \dots + f^{n-1})$$

$$(\text{Id}_E + f + f^2 + \dots + f^{n-1}) \circ (\text{Id}_E - f).$$

En déduire que $\text{Id}_E - f$ est un automorphisme. On précisera l'expression de son inverse.

Exercice 16 Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

1. Prouver que f est un automorphisme et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de Id_E et de f .
2. Montrer que $\ker(f - \text{Id}_E)$ et $\ker(f - 2\text{Id}_E)$ sont en somme directe.
3. Montrer que : $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \ker(f - 2\text{Id}_E)$.

4. Rappeler le théorème du rang et en déduire que :

$$\dim(E) \leq \dim(\ker(f - 2\text{Id}_E)) + \dim(\ker(f - \text{Id}_E)).$$

5. Rappeler la formule de Grassmann, puis montrer que :

$$\dim(\ker(f - 2\text{Id}_E)) + \dim(\ker(f - \text{Id}_E)) \leq \dim(E).$$

6. Montrer que : $\ker(f - \text{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\text{Id}_E) = E$.
7. Vérifier enfin que $f - \text{Id}_E$ est un projecteur.

Exercice 17 Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\ker f \subset \ker g \circ f$.
2. Montrer que $\text{Im } g \circ f \subset \text{Im } g$.
3. Montrer que $g \circ f = 0 \iff \text{Im } f \subset \ker g$.

Exercice 18 Démonstrations du cours :

Soient E et F deux ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que f est surjective ssi $\text{rg } f = \dim F$.
2. Montrer que f est injective ssi $\text{rg } f = \dim E$.
3. Montrer que, si f est injective, alors $\dim E \leq \dim F$.
4. Montrer que, si f est surjective, alors $\dim E \geq \dim F$.

Exercice 19 Démonstrations du cours :

Soient E et F deux ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que $\text{rg}(f) \leq \dim F$.
2. Montrer que $\text{rg}(f) \leq \dim E$.
3. En déduire que $\text{rg } f \leq \min(\dim E, \dim F)$.

Exercice 20 Soient E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\text{rg}(-f) = \text{rg}(f)$.
2. Vérifier que $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$.
3. Montrer que $\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.
4. En déduire que $|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f - g)$.

Exercice 21 Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(f^2) = \text{rg}(f)$.

1. Établir que $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$ et $\ker f \subset \ker f^2$.
2. Déduire que $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$ et $\ker f^2 = \ker f$.
3. Montrer que $\text{Im } f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E .

Exercice 22 Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie $n \geq 1$. Soit f et g deux endomorphismes de E tels que :

$$f + g = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq n.$$

1. Prouver que $\ker(f)$ et $\ker(g)$ sont en somme directe.
2. Établir que : $\dim \ker(f) + \dim \ker(g) \leq \dim E$.
3. Montrer que : $\dim \ker(f) + \dim \ker(g) \leq \dim E$.
4. En déduire que $\ker(f)$ et $\ker(g)$ sont supplémentaires dans E .
5. Montrer que f et g sont des projecteurs de E .

Exercice 23 Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée. On veut montrer que f est une homothétie.
 - (a) Démontrer que : $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda_x \cdot x$.
 - (b) Soit $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$, démontrer que si la famille (x, y) est liée alors $\lambda_x = \lambda_y$.
 - (c) Soit $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$, démontrer que si la famille (x, y) est libre alors $\lambda_x = \lambda_y$. On pourra considérer le vecteur $x + y$.
 - (d) En déduire alors que f est une homothétie.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec tous les endomorphismes de E , c'est-à-dire :

$$\forall g \in \mathcal{L}(E), \quad g \circ f = f \circ g.$$

On souhaite montrer que f est une homothétie.

Soit x un vecteur non nul de E .

- (a) Justifier l'existence d'un supplémentaire H de $\text{Vect}(x)$ dans E . Quelle est la dimension de H ?
- (b) En considérant le projecteur p sur $\text{Vect}(x)$ parallèlement à H , montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$.
- (c) En déduire alors que f est une homothétie.

Exercice 24 Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et u un endomorphisme de E .

1. On suppose dans cette question l'existence d'un projecteur p de E tel que $u = p \circ u - u \circ p$.
 - (a) Démontrer que $p \circ u \circ p = 0$. On précisera de quel 0 il s'agit.
 - (b) Prouver que $u \circ p = 0$.
 - (c) En déduire que $u^2 = 0$.
2. On suppose dans cette question que $u^2 = 0$.
 - (a) Démontrer que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$.
 - (b) Soient H et S deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E tels que $\text{Im}(u) \subset H \subset \text{Ker}(u)$. En notant q la projection sur H parallèlement à S , reconnaître l'application linéaire $q \circ u - u \circ q$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un projecteur p de E tel que $u = p \circ u - u \circ p$.