

Feuille d'exercices N°23

Espaces Vectoriels de Dim finie

Exercice 1 On pose $\vec{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{e}_3 = (0, 1, 1)$.

Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 On pose $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Trouver les coordonnées du vecteur $u = (1, 1, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3 On pose :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. Donner la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
3. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
4. Trouver les coordonnées de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4 Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On pose

$$u_1 = e_2 + 2e_3, u_2 = e_3 - e_1 \text{ et } u_3 = e_1 + 2e_2.$$

Montrer que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E .

Exercice 5 On pose: $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X^2 + X + 1$ et $P_3 = X^2 + X$. Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose de montrer par deux méthodes différentes que la famille:

$$\mathcal{B} = (1 + X, X + X^2, \dots, X^{n-1} + X^n, X^n)$$

est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. **Première méthode.**

- (a) Est-ce que $\mathcal{B}$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés ?
- (b) Rappeler la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (c) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (d) En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. **Deuxième méthode.**

- (a) Donner la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (b) Justifier que : $\text{Vect}(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
- (c) Montrer que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, X^k \in \text{Vect}(\mathcal{B})$.
- (d) Prouver que : $\mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}(\mathcal{B})$.
- (e) Déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ et sa dimension.
2. Rappeler la définition de famille de polynômes de degrés échelonnés.
3. Justifier que $(1, (X - a), (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Déduire que $(1, (X - a), (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base ?

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $f_k : x \mapsto e^{kx}$.

Montrer que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est libre de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 9 On considère les fonctions $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f_1(x) = \cos x, f_2(x) = x \cos x,$$

$$f_3(x) = \sin x \text{ et } f_4(x) = x \sin x.$$

1. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $f = af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$. Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
2. En déduire que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille libre de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
3. Quel est le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) ?

Exercice 10 On considère les applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f : x \mapsto e^x, g : x \mapsto x^2, h : x \mapsto \ln(x).$$

Montrer que la famille (f, g, h) est libre de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

Exercice 11 On définit les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1, v_n = n^2, w_n = 2^n.$$

Montrer que la famille $((u_n), (v_n), (w_n))$ est libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 12 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Montrer que (I_n, A, A^2) est libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 13 Soit E un espace vectoriel, et (x, y, z) une famille libre de E .

On pose $u = x + y, v = y + z$ et $w = z + x$.

Montrer que (u, v, w) est une famille libre.

Exercice 14 On pose $u = (0, 1, 1)$ et $v = (1, 0, 2)$.

1. Rappeler le théorème de la base incomplète.
2. Justifier qu'on peut compléter la famille (u, v) à une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Compléter (u, v) à une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer un supplémentaire de $F = \text{Vect}(u, v)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15 On note :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) : a + b + c - d = 0 \right\}.$$

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et sa base canonique.
2. Montrer que F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
3. Déterminer une base de F et sa dimension.
4. Compléter cette base de F à une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
5. Former un supplémentaire de F dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 16 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note :

$$F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) : AM = MB\}.$$

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et sa base canonique.
2. Montrer que F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
3. Déterminer une base de F et sa dimension.
4. Compléter cette base de F à une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
5. Former un supplémentaire de F dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 17 On pose le sev de $\mathbb{R}_3[X]$ suivant :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(0) = P'(1) = 0\}.$$

1. Déterminer une base de F et sa dimension.
2. Compléter la base de F à une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. En déduire un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 18 Soit $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions réelle de l'équation différentielle homogène $(E) : y' + ay = 0$.

1. Justifier que $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Déterminer une base de $\mathcal{S}$. Quelle est sa dimension?

Exercice 19 Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions réelle de l'équation différentielle homogène $(E) : y'' + y' + y = 0$.

1. Justifier que $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Déterminer une base de $\mathcal{S}$. Quelle est sa dimension?

Exercice 20 On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

$$E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0\}.$$

Déterminer une base de E et donner sa dimension.

Exercice 21 1. Rappeler la dimension de $\mathbb{R}_5[X]$ et sa base canonique.

2. Étudier la liberté de la famille $(X^2 + X + 2, X + 1, X^3 + X - 1)$.
3. Justifier qu'on peut compléter la famille $(X^2 + X + 2, X + 1, X^3 + X - 1)$ à une base de $\mathbb{R}_5[X]$, puis la compléter.
4. Déterminer un supplémentaire de $F = \text{Vect}(X^2 + X + 2, X + 1, X^3 + X - 1)$ dans $\mathbb{R}_5[X]$.

Exercice 22 Soient $u = (1, 0, 2), v = (1, 1, 2), w = (2, 2, 2), t = (1, 2, 2)$.

1. Rappeler la dimension de $\mathbb{R}^3$ et sa base canonique.
2. Énoncer le théorème de la base extraite.
3. Soit $\mathcal{F}$ est une famille libre d'un ev E de dimension finie. Comparer le nombre de vecteurs de $\mathcal{F}$ et $\dim E$.
4. Justifier par un argument de dimension que $\mathcal{G} = (u, v, w, t)$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

5. Montrer que $\mathcal{G} = (u, v, w, t)$ est générateur de $\mathbb{R}^3$.
6. Montrer que w est une combinaison linéaire de u et v .
7. Extraire de $\mathcal{G}$ une base de $\mathbb{R}^3$.
8. Quel est le rang de $\mathcal{G}$?

Exercice 23 Soient $u = (1, 1, 0), v = (2, 0, 1), w = (1, 0, 2)$ et $w = (3, 1, 1)$.

1. **Question de cours :** Soit $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs d'un ev E de dimension finie.
 - (a) Comparer le nombre de vecteurs de $\mathcal{F}$ et $\dim E$ lorsque $\mathcal{F}$ est génératrice.
 - (b) Comparer le nombre de vecteurs de $\mathcal{F}$ et $\dim E$ lorsque $\mathcal{F}$ est libre.
 - (c) Que peut-on déduire de la liberté de $\mathcal{F}$ lorsque $\text{Card}(\mathcal{F}) > \dim E$.
2. Justifier que (u, v, w, t) est liée de $\mathbb{R}^3$ par un argument de dimension.
3. Montrer que la famille (u, v, w) est libre de $\mathbb{R}^3$.
4. Que peut-on déduire de la liberté de (u, v) ?
5. La famille (u, v) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?
6. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Calculer le rang de la famille (u, v, w, t) .

Exercice 24 1. Rappeler la définition du rang d'une famille $(u_1, \dots, u_p)$ d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

2. Posons $u = (1, 1, 1, 1), v = (1, -1, 1, -1)$ et $w = (1, 0, 1, 1)$.
 - (a) Montrer que la famille (u, v, w) est libre.
 - (b) En déduire $\text{rg}(u, v, w)$.
3. Posons $u = (1, -1, 0), v = (2, -1, 1), w = (0, 1, 1)$.
 - (a) Vérifier que v est une combinaison linéaire de u et w .
 - (b) En déduire $\text{rg}(u, v, w)$.

Exercice 25 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que la famille $(I_n, M, M^2, \dots, M^{n^2})$ est liée.
3. En déduire l'existence d'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ non nul tel que l'on ait : $P(M) = 0_{n,n}$.

Exercice 26 Soient F et G les sev suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 2z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = x + z\}.$$

1. Donner une base de F , puis en déduire sa dimension.
2. Donner une base de G , puis en déduire sa dimension.
3. Calculer $F \cap G$.
4. En déduire que F et G sont supplémentaires.
5. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 27 Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 2z = 0\}.$$

1. Donner une base de F , une base de G , puis en déduire leur dimension respective.
2. Prouver que $F \cap G$ est une droite vectorielle.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F + G$.
4. Les sev F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

5. Montrer que la famille constituée des vecteurs de la base de F et de la base de G trouvées en Q1 et Q2 est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Est-elle libre ?

Exercice 28 On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. Donner une base de F .
2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. En déduire un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.
4. On pose $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_3 = (-1, 0, -1, 0)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?
5. On pose G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1 , u_2 et u_3 . Quelle est la dimension de G ?
6. Donner une base de $F \cap G$.
7. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
8. Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?

Exercice 29 On note $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z = y + t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y + z = 0\}$.

1. Prouver que F est un sev de $\mathbb{R}^4$, puis préciser sa dimension et donner une base.
2. Prouver que G est un sev de $\mathbb{R}^4$, puis préciser sa dimension et donner une base.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
4. Donner une base de $\mathbb{R}^4$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.
5. Soient $u = (-1, 2, 0, -2)$ et $v = (2, -1, 0, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Montrer que la famille (u, v) est une base de F .
6. Justifier que $w = (3, 3, 0, -3) \in F$, puis donner ses coordonnées dans la base (u, v) .
7. Justifier qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}^4$ tels que la famille (u, v, a, b) soit une base de $\mathbb{R}^4$ sans utiliser la question 3.
8. Vérifier que $\text{Vect}(a, b)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 30 Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $\dim F + \dim G > n$ alors $F \cap G$ contient un vecteur non nul.