

Feuille d'exercices N°20

Espaces Vectoriels

Exercice 1 1. Montrer que

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 0\}$$

est sev de \mathbb{R}^3 .

2. Montrer que $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - 5z = 0\}$ est sev de \mathbb{R}^3 .

3. En déduire que $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - 5z = 0\}$ est sev de \mathbb{R}^3 .

Exercice 2 Montrer que :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = y - z = z - t = 0\}$$

est sev de \mathbb{R}^3 .

Exercice 3 Montrer que :

$$F = \{(3a - 2b, a + b, b, a) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

est un sev de \mathbb{R}^4 .

Exercice 4 Justifier que les ensembles suivants ne sont pas des sous espaces vectoriel de \mathbb{R}^2 :

$$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2\};$$

$$F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\};$$

$$F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Exercice 5 Montrer que les ensembles suivants sont des sous espaces vectoriel de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$A_1 = \{f \in E : f(1) = 0\};$$

$$A_2 = \{f \in E : f \text{ est impaire}\};$$

$$A_3 = \{f \in E : f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\}.$$

Exercice 6 Justifier que les ensembles suivants ne sont pas des sev de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$A_1 = \{f \in E : f(0) = 1\};$$

$$A_2 = \{f \in E : f \text{ est croissante}\}.$$

Exercice 7 Montrer que les ensembles sont suivants des sev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n) \text{ bornée}\};$$

$$G = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n) \text{ convergente}\}.$$

Exercice 8 Montrer que

$$F = \{P \in \mathbb{K}[X] : P(0) = P(2)\}$$

est un sev de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 9 Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i ?

$$E = \mathbb{R}^2, u = (1, 2), u_1 = (1, -2), u_2 = (2, 3);$$

$$E = \mathbb{R}^2, u = (1, 2), u_1 = (1, -2), u_2 = (2, 3),$$

$$u_3 = (-4, 5);$$

$$E = \mathbb{R}^3, u = (2, 5, 3), u_1 = (1, 3, 2), u_2 = (1, -1, 4);$$

$E = \mathbb{R}^3, u = (3, 1, m), u_1 = (1, 3, 2), u_2 = (1, -1, 4)$ (discuter suivant la valeur de m).

Exercice 10 1. Le vecteur $u = (1, 2)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $u_1 = (1, -2)$ et $u_2 = (2, 3)$?

2. Le vecteur $u = (2, 5, 3)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $u_1 = (1, 3, 2)$ et $u_2 = (1, -1, 4)$?

3. Le vecteur $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 11 Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour quelle valeur de m le vecteur $u = (3, 1, m)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $u_1 = (1, 3, 2)$ et $u_2 = (1, -1, 4)$.

Exercice 12 On considère les ensembles suivants

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$$

$$G = \{(a - b, a + b, a - 3b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Établir que F et G sont des sev de \mathbb{R}^3 .

2. Déterminer $F \cap G$.

3. Prouver que $F + G = \mathbb{R}^3$. La somme est-elle directe ?

Exercice 13 On pose :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \text{ et } G = \text{vect}((1, 1, 1)).$$

1. Montrer que F est un sev de \mathbb{K}^3 .

2. Prouver que $F \cap G = \{0_{\mathbb{K}^3}\}$.

3. Montrer que $\mathbb{K}^3 = F + G$.

4. En déduire que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{K}^3 .

Exercice 14 Soit F et G deux parties de \mathbb{R}^3 donnés par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = x - y + z = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sev de \mathbb{R}^3 .

2. Montrer que G est une droite vectorielle de \mathbb{R}^3 .

3. Prouver que $F \cap G = \{0_{\mathbb{K}^3}\}$.

4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F + G$.

5. En déduire que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 15 Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul de degré $n + 1$.

1. Montrer que :

$$F = \{P \in \mathbb{K}[X] : A \text{ divise } P\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

2. Montrer que F et $\mathbb{K}_n[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

Indication : pensez à la division euclidienne.

Exercice 16 Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note \mathcal{P} l'ensemble des fonctions paires et \mathcal{I} l'ensemble des fonctions impaires.

1. Montrer que \mathcal{I} et \mathcal{P} sont des sous-espaces vectoriels de E .

2. Montrer que $\mathcal{I} \cap \mathcal{P} = \{0_E\}$.

3. Soit $f \in E$.

(a) Vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

(b) Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } f_2 : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

4. En déduire que \mathcal{I} et \mathcal{P} sont supplémentaires.

Exercice 17 On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est :

- symétrique si ${}^tM = M$,
- antisymétrique si ${}^tM = -M$.

On note alors :

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, i.e.

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^tM = M\}.$$

- $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, i.e.

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^tM = -M\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0_n\}$.

4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose :

$$A = \frac{1}{2}(M + {}^tM) \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2}(M - {}^tM).$$

(a) Calculer $A + B$.

(b) Vérifier que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

5. En déduire que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18 Soit $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^2 , on note :

$$F = \{f \in E : f'' + f = 0\} \text{ et } G = \{y \in E : f'(0) = f(0) = 0\}.$$

1. Rappeler la définition d'une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

2. (a) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

(b) En déduire que F est un sous-espace vectoriel engendré par deux éléments que l'on précisera.

3. Prouver que G est un sous-espace vectoriel de E .

4. Montrer que $F \cap G = \{0\}$.

5. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .