LYCEE MOHAMMED VI D'EXCELLENCE

Feuille d'exercices N°1

Exercice 1 *Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :*

$$z_1 = \frac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i},\ z_2 = \frac{(2+i)(3+2i)}{2-i} \text{ et } z_3 = \frac{3+4i}{(2+3i)(4+i)}.$$

Exercice 2 *Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants :*

$$z_1 = 1+i, z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} \text{ et } z_3 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2+2i}$$

Exercice 3 *Calculer z^n pour $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ et $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 4 *Soient $\theta \in]0, 2\pi[$ et $z = \dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{-i\theta}}$.*
Calculer le module et un argument de z.

Exercice 5 *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Transformer $1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}$ sous la forme $re^{i\alpha}$ où r et α sont des réels.*

Exercice 6 *On pose $\omega = \sqrt{3}+i$. Déterminer les $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega^n \in \mathbb{R}$.*

Exercice 7 *Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrer que : $i\dfrac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}$.*

Exercice 8 *Soit u, v des nombres complexes non réels tels que $|u| = |v| = 1$ et $uv \neq 1$.*
Montrer que $\dfrac{u+v}{1+uv}$ est réel.

Exercice 9 *Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.*

1. *Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur ssi $z \in \mathbb{U}$.*
2. *Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U}$ ssi z est imaginaire pur.*

Exercice 10 *Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :*

$$z_1 = -3+4i, z_2 = -5+12i \text{ et } z_3 = -24-10i.$$

Exercice 11
1. *Calculer les racines $3^{\text{èmes}}$ de -8.*
2. *Calculer les racines $5^{\text{èmes}}$ de i.*

Exercice 12 *Déterminer les racines $4^{\text{èmes}}$ de $-7-24i$.*

Exercice 13 *Monter que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$:*

$$\mathrm{Re}(ab) \leqslant \frac{|a|^2+|b|^2}{2}.$$

Exercice 14 *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Soit $z \in \mathbb{C}$. Simplifier l'expression :*

$$(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^n).$$

2. *Soit* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. *Montrer que :*

$$\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}.$$

Exercice 15 *Soient* $a, b \in \mathbb{C}$.

1. *Prouver que :* $2|b| \leqslant |a+b| + |a-b|$.
2. *En déduire que :* $|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|$.

Exercice 16

1. *Déterminer les racines carrées de* $18i$.
2. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *:* $z^2 + z - iz - 5i = 0$

Exercice 17 *Résoudre les équations suivantes :*

(a) $z^2 - iz + 5 - 5i = 0$. ***(b)*** $z^2 - iz + 1 - 3i = 0$.

Exercice 18 *Soit* P *le polynôme défini dans* $\mathbb{C}$ *par :*

$$P(z) = z^3 - z^2 + (5+7i)z + 10 - 2i.$$

1. *Montrer que* P *possède une racine imaginaire pure. On le note* ai*, avec* $a \in \mathbb{R}$.
2. *En déduire une factorisation de* P *de la forme* $P(z) = (z - ai)Q(z)$ *où* Q *est un polynôme de degré 2 à coefficients complexes.*
3. *Résoudre alors* $P(z) = 0$.

Exercice 19

1. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *:* $z^2 - (5-14i)z - 2(12+5i) = 0$.
2. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *:* $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(12+5i) = 0$.

Exercice 20

1. *Calculer les racines* $4^{\text{èmes}}$ *de* $-i$.
2. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $(z+i)^4 + iz^4 = 0$.

Exercice 21

1. *Donner les racines* $4^{\text{èmes}}$ *de l'unité.*
2. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

Exercice 22 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes :*

(a) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$ ***(b)*** $e^z + e^{-z} = 1$.

Exercice 23 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes :*

(a) $2z + 3\bar{z} = 1$. ***(b)*** $z^2 = \bar{z}$.

Exercice 24

1. *Déterminer les racines carrées de* $1+i$ *par la méthode algébrique et par la méthode trigonométrique. En déduire les valeurs de* $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. *Calculer les valeurs de* $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 25 *Linéariser les expressions suivantes, où* $x \in \mathbb{R}$:

1. $\cos^2(x)\sin(x)$
2. $\sin^3(x)\cos^2(x)$
3. $\sin^4(x)\cos^2(x)$
4. $\cos^3(x)\sin^2(x)$

Exercice 26 *Soient p, q des réels. Montrer que*

(a) $\cos(p)\cos(q) = \frac{1}{2}(\cos(p+q)+\cos(p-q))$.

(b) $\sin(p)\sin(q) = \frac{1}{2}(\cos(p-q)-\cos(p+q))$.

(c) $\cos(p)\sin(q) = \frac{1}{2}(\sin(p+q)+\sin(p-q))$.

Exercice 27 *Déterminer les points d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que :*

1. $|z-1+i| = 2$.
2. $\arg(z) \equiv 0\,[2\pi]$.
3. $Re(z)+Im(z) = 1$.
4. $|z-2-3i| = |z+1-i|$.
5. $1, z$ *et* z^2 *soient les affixes de trois points alignés.*

Exercice 28 1. *Montrer que les points suivantes sont alignés :*

$$A(2+3i), B(4-i) \text{ et } C(8-9i).$$

2. *Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires où :*

$$A(1+5i), B(-1-i), C(4-i) \text{ et } D(-5+2i).$$

3. *Montrer que le triangle ABC est rectengle et isocèle en A où :*

$$A(2+3i), B(4+7i) \text{ et } C(-2+5i).$$

Exercice 29 *Donner les applications qui représentent dans le plan complexe les transformations suivantes :*

1. *La translation de vecteur d'affixe $-2+i$.*
2. *La symétrie de centre i .*
3. *La rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre 1.*
4. *L'homothétie de rapport 3 et de centre $1+2i$.*
5. *La similitude de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre $1+i$.*

Exercice 30 *Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que :*

$$e^{ix}+e^{iy}+e^{iz} = 0.$$

Montrer que

$$e^{2ix}+e^{2iy}+e^{2iz} = 0.$$

Exercice 31 *Soient A, B, C, D quatre points du plan distincts deux à deux. On suppose de plus A, B, C non alignés et on introduit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O circonscrit au triangle ABC.*
On choisit un repère orthonormé du plan de centre O tel que $\mathcal{C}$ ait pour rayon 1. On note a, b, c, d les affixes respectifs de A, B, C, D.
On pose enfin $Z = \frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b}$.

1. *Dans cette question, on suppose que D appartient à $\mathcal{C}$.*

   (a) *Justifier que $\bar{a} = \dfrac{1}{a}$, $\bar{b} = \dfrac{1}{b}$, $\bar{c} = \dfrac{1}{c}$, $\bar{d} = \dfrac{1}{d}$.*

   (b) *Montrer que Z est un réel.*

   (b) *En déduire que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})\,[\pi]$.*

2. *Réciproquement, on suppose que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})\,[\pi]$ et on veut montrer que D appartient à $\mathcal{C}$.*

   (a) *Que peut-on dire de Z ?*

   (b) *Exprimer d en fonction de a, b, c, Z.*

   (c) *Calculer $\bar{d}$ et en déduire que D appartient à $\mathcal{C}$.*

Exercice 32 *Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.*
On dit d'un triangle équilatéral ABC est direct si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

1. *On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.*

   (a) *Montrer que : $j^3 = 1$ et $j^2 + j + 1 = 0$.*

   (b) *Vérifier que : $j^2 + e^{i\frac{\pi}{3}} = 0$.*

2. *Soient A, B et C trois points d'affixes respectifs a, b et c.*

   (a) *Prouver que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si : $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$.*

   (b) *En déduire que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si : $a + jb + j^2c = 0$.*

   (c) *Prouver que ABC est un triangle équilatéral indirect si et seulement si : $a + jc + j^2b = 0$.*

Exercice 33 *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Calculer en fonction de θ la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$.*

2. *En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.*