

Feuille d'exercices N°01

Nombres Complexes

Exercice 1 Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i, z_2 = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} \text{ et } z_3 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2 + 2i}$$

Exercice 2 Calculer z^n pour $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 Soient $\theta \in]0, 2\pi[$ et $z = \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{-i\theta}}$.
Calculer le module et un argument de z .

Exercice 4 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Transformer $1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta}$ sous la forme $re^{i\alpha}$ où r et α sont des réels.

Exercice 5 On pose $\omega = \sqrt{3} + i$. Déterminer les $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega^n \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrer que : $i \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 Soit u, v des nombres complexes non réels tels que $|u| = |v| = 1$ et $uv \neq 1$.
Montrer que $\frac{u+v}{1+uv}$ est réel.

Exercice 8 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

1. Montrer que $\frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur ssi $z \in \mathbb{U}$.

2. Montrer que $\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U}$ ssi z est imaginaire pur.

Exercice 9 Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -3 + 4i, z_2 = -5 + 12i \text{ et } z_3 = -24 - 10i.$$

Exercice 10 1. Calculer les racines 3^{èmes} de -8 .

2. Calculer les racines 5^{èmes} de i .

Exercice 11 Déterminer les racines 4^{èmes} de $-7 - 24i$.

Exercice 12 Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$:

$$\operatorname{Re}(ab) \leq \frac{|a|^2 + |b|^2}{2}.$$

Exercice 13 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Simplifier l'expression :

$$(1 - z)(1 + z + z^2 + \cdots + z^n).$$

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer que :

$$\left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}.$$

Exercice 14 Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

1. Prouver que : $2|b| \leq |a + b| + |a - b|$.

2. En déduire que : $|a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|$.

Exercice 15 1. Déterminer les racines carrées de $18i$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + z - iz - 5i = 0$

Exercice 16 Résoudre les équations suivantes :

$$(a) \ z^2 - iz + 5 - 5i = 0. \quad | \quad (b) \ z^2 - iz + 1 - 3i = 0.$$

Exercice 17 Soit P le polynôme défini dans $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - z^2 + (5 + 7i)z + 10 - 2i.$$

1. Montrer que P possède une racine imaginaire pure. On le note ai , avec $a \in \mathbb{R}$.

2. En déduire une factorisation de P de la forme $P(z) = (z - ai)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré 2 à coefficients complexes.

3. Résoudre alors $P(z) = 0$.

Exercice 18 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - (5 - 14i)z - 2(12 + 5i) = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(12 + 5i) = 0$.

Exercice 19 1. Calculer les racines 4^{èmes} de $-i$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z + i)^4 + iz^4 = 0$.

Exercice 20 1. Donner les racines 4^{èmes} de l'unité.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

Exercice 21 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(a) \ e^z = 1 + i\sqrt{3} \quad | \quad (b) \ e^z + e^{-z} = 1.$$

Exercice 22 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(a) \ 2z + 3\bar{z} = 1. \quad | \quad (b) \ z^2 = \bar{z}.$$

Exercice 23 1. Déterminer les racines carrées de $1 + i$ par la méthode algébrique et par la méthode trigonométrique.
En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2. Calculer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 24 Linéariser les expressions suivantes, où $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{l|l} 1. \cos^2(x) \sin(x) & 3. \sin^4(x) \cos^2(x) \\ 2. \sin^3(x) \cos^2(x) & 4. \cos^3(x) \sin^2(x) \end{array}$$

Exercice 25 Soient p, q des réels. Montrer que

$$(a) \cos(p) \cos(q) = \frac{1}{2} (\cos(p+q) + \cos(p-q)).$$

$$(b) \sin(p) \sin(q) = \frac{1}{2} (\cos(p-q) - \cos(p+q)).$$

$$(c) \cos(p) \sin(q) = \frac{1}{2} (\sin(p+q) + \sin(p-q)).$$

Exercice 26 Déterminer les points d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que :

$$1. |z - 1 + i| = 2.$$

$$2. \arg(z) \equiv 0 [2\pi].$$

$$3. \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 1.$$

$$4. |z - 2 - 3i| = |z + 1 - i|.$$

$$5. 1, z \text{ et } z^2 \text{ soient les affixes de trois points alignés.}$$

Exercice 27 1. Montrer que les points suivantes sont alignés :

$$A(2 + 3i), B(4 - i) \text{ et } C(8 - 9i).$$

2. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires où :

$$A(1 + 5i), B(-1 - i), C(4 - i) \text{ et } D(-5 + 2i).$$

3. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A où :

$$A(2 + 3i), B(4 + 7i) \text{ et } C(-2 + 5i).$$

Exercice 28 Donner les applications qui représentent dans le plan complexe les transformations suivantes :

1. La translation de vecteur d'affixe $-2 + i$.

2. La symétrie de centre i .

3. La rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre 1.

4. L'homothétie de rapport 3 et de centre $1 + 2i$.

5. La similitude de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre $1 + i$.

Exercice 29 Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0.$$

Montrer que

$$e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0.$$

Exercice 30 Soient A, B, C, D quatre points du plan distincts deux à deux. On suppose de plus A, B, C non alignés et on introduit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O circonscrit au triangle ABC . On choisit un repère orthonormé du plan de centre O tel que $\mathcal{C}$ ait pour rayon 1. On note a, b, c, d les affixes respectifs de A, B, C, D .

$$\text{On pose enfin } Z = \frac{d - a}{c - a} \frac{c - b}{d - b}.$$

1. Dans cette question, on suppose que D appartient à $\mathcal{C}$.

$$(a) \text{ Justifier que } \bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}, \bar{d} = \frac{1}{d}.$$

(b) Montrer que Z est un réel.

$$(b) \text{ En déduire que } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) [\pi].$$

2. Réciproquement, on suppose que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) [\pi]$ et on veut montrer que D appartient à $\mathcal{C}$.

(a) Que peut-on dire de Z ?

(b) Exprimer d en fonction de a, b, c, Z .

(c) Calculer $\bar{d}$ et en déduire que D appartient à $\mathcal{C}$.

Exercice 31 Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On dit d'un triangle équilatéral ABC est direct si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

1. On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$$(a) \text{ Montrer que : } j^3 = 1 \text{ et } j^2 + j + 1 = 0.$$

$$(b) \text{ Vérifier que : } j^2 + e^{i\frac{\pi}{3}} = 0.$$

2. Soient A, B et C trois points d'affixes respectifs a, b et c .

(a) Prouver que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si : $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$.

(b) En déduire que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si : $a + jb + j^2c = 0$.

(c) Prouver que ABC est un triangle équilatéral indirect si et seulement si : $a + jc + j^2b = 0$.

Exercice 32 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer en fonction de θ la somme $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$.

2. En déduire les valeurs de $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.