

Feuille d'exercices N°19

Polynômes et Frac. rationnelles

Exercice 1 On veut déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant

$$P'^2 - 4P = 0 \quad (\star)$$

1. Déterminer les polynômes constants $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant (\star) .
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant vérifiant (\star) .
 - (1) Quel est le degré de P ?
 - (2) Déterminer P .
3. Conclure.

Exercice 2 On veut déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant

$$(X^2 + 1)P'' - 6P = 0 \quad (\star)$$

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à 1 vérifiant (\star) .
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 2$ vérifiant (\star) .
 - (1) Déterminer n .
 - (2) Déterminer P .
3. Conclure.

Exercice 3 Résoudre l'équation suivante :

$$Q^2 = XP^2$$

d'inconnues $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 4 On veut déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant la relation :

$$(E) : P(X^2) = (X^2 + 1)P(X).$$

1. Déterminer les polynômes constants vérifiant (E) .
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant vérifiant (E) .
 - (1) Quel est le degré de P ?
 - (2) Déterminer P .
3. Conclure.

Exercice 5 Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que :

$$P(1) = 3, P'(1) = 4, P''(1) = 5, \text{ et } \forall n \geq 3, P^{(n)}(1) = 0.$$

Exercice 6 Soit $n \geq 2$. On pose

$$P_n = (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2.$$

1. Déterminer le reste de P_n dans la division euclidienne par $X - 3$.
2. Déterminer le reste de P_n dans la division euclidienne par $(X - 2)^2$.
3. Déterminer le reste de P_n dans la division euclidienne par $(X - 2)(X - 3)$.

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$.

Déterminer le reste de la division euclidienne de

$$P = (X - 2)^{2n} + (X - 1)^n + 1$$

par $(X - 1)^2(X - 2)$.

Exercice 8 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $(a, b) \in \mathbb{K}^2, a \neq b$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par le polynôme $X - a$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$.

Exercice 9 Soient $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

En exploitant la formule de Taylor, déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^3$.

Exercice 10 Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $(A - I_2)(A - 3I_2) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X - 1)(X - 3)$.
3. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 Soient $n \geq 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Déterminer le reste dans $\mathbb{R}[X]$ dans la division euclidienne de $P = (X \sin \theta + \cos \theta)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 12 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.

Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \exists z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = \lambda.$$

Exercice 13 Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (λ, μ) pour que $X^2 + 1$ divise $P = X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 14 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine de $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$?

Exercice 15 Soit $n \geq 3$. Démontrer que le polynôme $P = X^n - nX + 1$ n'a que des racines simples.

Exercice 16 Justifier les divisibilités suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, X^2 \mid (X + 1)^n - nX - 1$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, (X - 1)^3 \mid nX^{n+2} - (n+2) \cdot X^{n+1} + (n+2)X - n$.

Exercice 17 1. Factoriser $1 + X + X^2$ dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Montrer que :

$$\forall (n, p, q) \in \mathbb{N}^3, 1 + X + X^2 \mid X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$$

Exercice 18 1. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

Montrer que si $P(i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors $P = 0$.

2. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

Montrer que si $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$, alors $P = Q$.

Exercice 19 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\int_0^1 P^2(t) dt = 0$.

1. Montrer que : $\forall t \in [0, 1], P(t) = 0$.

2. En déduire que $P = 0$.

Exercice 20 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$. On souhaite montrer que P est un polynôme constant avec deux méthodes.

1. **Méthode 1** : On pose $Q(X) = P(X) - P(0)$.

(1) Montrer que tout entier naturel n est racine de Q .

(2) En déduire que Q est le polynôme nul, puis conclure.

2. **Méthode 2** : On suppose que P est non constant.

(1) Justifier que P admet une racine α dans \mathbb{C} .

(2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(\alpha + n) = 0$.

(3) Conclure.

Exercice 21 On veut montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(\sin t) = \sin 3t \quad (\star).$$

1. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant (\star) .

2. Montrer l'unicité du polynôme P trouvé dans la question précédente.

Exercice 22 On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \bar{z}.$$

1. Montrer que $P = X$.

2. Montrer que $P = -X$.

3. Conclure.

Exercice 23 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P = (X^2 - X + 1)^2 + 1.$$

Exercice 24 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$X^4 - 1 \quad X^5 - 1 \quad X^4 + 1.$$

Exercice 25 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$X^4 + X^2 + 1 \quad X^4 - 2X^2 - 3 \quad X^8 + X^4 + 1.$$

Exercice 26 On considère le polynôme suivant :

$$P = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1.$$

1. Vérifier que i est racine multiple de P .

2. Justifier que P est divisible par $(X^2 + 1)^2$.

3. En déduire une factorisation de P sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 27 Soit $P = X^{2n+1} - 1$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

1. Déterminer les racines de P dans \mathbb{C} .

2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

3. À l'aide du changement d'indice, $\ell = 2n + 1 - k$, déterminer une nouvelle expression de :

$$\prod_{k=n+1}^{2n} \left(X - e^{i \frac{2k\pi}{2n+1}} \right).$$

4. Déduire la factorisation en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de P .

Exercice 28 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme $P = (X + 1)^n - e^{2in\theta}$.

1. Déterminer les racines complexes de P sous forme trigonométrique.

2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

3. En calculant $P(0)$, déterminer $A = \prod_{k=0}^{n-1} \sin \left(\theta + \frac{k\pi}{n} \right)$.

Exercice 29 Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P = X^{2n} - 2 \cos(n\theta) X^n + 1$.

1. Montrer que : $P = (X^n - e^{in\theta})(X^n - e^{-in\theta})$.

2. Factoriser $X^n - e^{in\theta}$ dans $\mathbb{C}[X]$.

3. Déduire que la factorisation en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de P s'écrit :

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{n})} \right) \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i(-\theta + \frac{2k\pi}{n})} \right).$$

4. À l'aide du changement d'indice, $\ell = n - k$, déterminer une nouvelle expression de :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{i(-\theta + \frac{2k\pi}{n})} \right).$$

5. En déduire la factorisation en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de P .

Exercice 30 Pour $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$.

1. Vérifier que : $X^{n+1} - 1 = (X - 1)P_n$.

2. Factoriser $X^{n+1} - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

3. En déduire une factorisation de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

4. En calculant $P_n(1)$, calculer la valeur de $\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n+1}$.

Exercice 31 Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le polynôme P_n défini par :

$$P_n = \frac{1}{2i} [(X + i)^{n+1} - (X - i)^{n+1}].$$

1. Déterminer le degré de P_n et son coefficient dominant.

2. Montrer que le polynôme P_n admet n racines réelles (que l'on calculera).

3. Donner la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de P_n .

4. Calculer la somme et le produit des racines de P_n (on distinguera les cas suivant la parité de n).

Exercice 32 Polynômes de Tchebychev
On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant :

$$T_0 = 1, T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchebychev de première espèce.

1. Déterminer T_2 et T_3 .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le coefficient dominant T_n est 2^{n-1} .
4. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos \theta) = \cos n\theta.$$

5. En déduire la valeur de $T_n(1)$.
6. Calculer la valeur de $T'_n(1)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (1) Déterminer les racines de T_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$. Combien y en a-t-il?
 - (2) Dire pourquoi toutes les racines complexes de T_n appartiennent à $[-1, 1]$.
 - (3) Déduire la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de T_n .

Exercice 33 (Polynômes d'interpolation de Lagrange)

Soit (a_0, a_1, \dots, a_n) une famille d'éléments de \mathbb{K} deux à deux distincts.

Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on pose

$$L_i(X) = \frac{1}{\prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} (a_i - a_k)} \times \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} (X - a_k).$$

1. (1) Vérifier que : $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker qui est égal à 1 lorsque $i = j$ et 0 sinon.
- (2) Calculer $\deg(L_i)$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
2. Soient b_0, \dots, b_n des éléments de \mathbb{K} .

On pose : $P = \sum_{i=0}^n b_i L_i$.

- (1) Vérifier que $P \in \mathbb{K}_n[X]$.
- (2) Montrer que :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_j) = b_j.$$

- (3) Soit $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, Q(a_j) = b_j.$$

Montrer que $P = Q$.

- (4) Conclure qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_j) = b_j.$$