

Feuille d'exercices N°14

Limites

Exercice 1 Étudier les limites suivantes :

$$\boxed{1} \quad \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \text{ en } 1 \quad \boxed{2} \quad \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \text{ en } 1 \quad \boxed{3} \quad \frac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8} \text{ en } +\infty$$

$$\boxed{4} \quad \sqrt{x^2+2x}-x \text{ en } +\infty \quad \boxed{5} \quad x^5 e^{-x^2} \text{ en } +\infty \quad \boxed{6} \quad \frac{x+\cos x}{x+\sin x} \text{ en } +\infty$$

$$\boxed{7} \quad \frac{x \ln x + 7}{x^2 + 4} \text{ en } +\infty \quad \boxed{8} \quad \frac{e^{3x} + 2x + 7}{e^x + e^{-x}} \text{ en } +\infty \quad \boxed{9} \quad \frac{\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x^2} \text{ en } 0$$

Exercice 2 En calculant éventuellement des équivalents, déterminer les limites suivantes :

$$\boxed{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + 2x)}{x^2 - x^4} \quad \boxed{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x(3+x) \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})} \quad \boxed{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\tan(6x)}$$

$$\boxed{4} \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} \quad \boxed{5} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos 2x} \quad \boxed{6} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x+1} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$$

$$\boxed{7} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}} \quad \boxed{8} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) \quad \boxed{9} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \arctan x}{x \tan x}$$

$$\boxed{10} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \quad \boxed{11} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(\sin x) - \exp(\tan x)}{\sin x - \tan x}$$

Exercice 3 Soit $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln x}\right)$.

1. Démontrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$.

2. En déduire la limite en $+\infty$ de $(e^{f(x)} - 1) \ln x$.

3. Soit $g(x) = \left[\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right] \ln x$. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Exercice 4 Déterminer un équivalent au point considéré des fonctions suivantes :

$$\boxed{1} \quad \frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}} \text{ en } +\infty \quad \boxed{2} \quad \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} \text{ en } +\infty \quad \boxed{3} \quad \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \text{ en } +\infty$$

$$\boxed{4} \quad \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - 1 \text{ en } +\infty \quad \boxed{5} \quad \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} \text{ en } +\infty \quad \boxed{6} \quad \ln(\cos x) \text{ en } 0$$

$$\boxed{7} \quad [x] \text{ en } +\infty \quad \boxed{8} \quad [x] \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \text{ en } +\infty \quad \boxed{9} \quad x^4 + x + x^2 \text{ en } 0$$

Exercice 5 Montrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limite :

1. $x \mapsto \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ en $a = 0$.

2. $x \mapsto \sin(\cos x)$ en $a = +\infty$.

3. $x \mapsto \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ en $a = +\infty$

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique (avec $T > 0$) possédant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, telle que $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, où (u_n) est la suite tendant vers $+\infty$. Montrer que $f \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.