

Feuille d'exercices N°13

Suites Numériques

Exercice 1 Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites (u_n) suivantes :

$$(a) u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} \quad (b) u_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$$

$$(c) u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 - 1}} \quad (d) u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx] \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(e) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} \quad (f) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$$

$$(g) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (h) u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$$

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{1+t^n} \sin(nt) dt$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leq \frac{1}{n}$.

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 3 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles telles que

$$\begin{cases} u_n \leq a, v_n \leq b \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a + b \end{cases}$$

Montrer que (u_n) converge vers a et que (v_n) converge vers b .

Exercice 4 Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $0 \leq u_n \leq 1, 0 \leq v_n \leq 1$ et $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

Exercice 5 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que

$$u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

Exercice 6 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

1. Montrer que si $\ell < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. Montrer que si $\ell > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 7 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

1. On suppose que $\ell < 1$.

a. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante.

b. Justifier que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente. On pose alors $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

c. Montrer que $L = 0$, c-à-d $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

d. Application : Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!}$ ($a > 0$).

2. Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Indication : On pourra considérer $v_n = \frac{1}{u_n}$.

Exercice 8 Soient a et b deux réels positifs fixés. On définit deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_0 = a, b_0 = b$ et les relations de récurrence

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$.

2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq b_n$.

3. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

4. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |b_n - a_n|$.

5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |b_n - a_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |b_1 - a_1|$.

6. Démontrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune.

Exercice 9 1. Montrer que la suite de terme général $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ n'admet pas de limite.

2. Montrer que la suite de terme général $v_n = \cos((n+1/n)\pi)$ n'admet pas de limite.

Exercice 10 Justifier que la suite de terme général $u_n = \cos(n)$ n'admet pas de limite.

Indication: $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

Exercice 11 Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}.$$

Montrer que (u_n) tend vers 0.

Exercice 12 Soit (u_n) une suite réelle telle que (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent.

1. Montrer que $\lim u_{2n} = \lim u_{3n}$, puis $\lim u_{2n+1} = \lim u_{3n}$.
2. En déduire que (u_n) converge.

Exercice 13 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Étudier la monotonie de (H_n) .
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
3. En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 14 Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
2. En déduire que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 15 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

1. Étudier les variations de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que pour tout $k \geq 2$

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
3. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.
4. Justifier que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que $1 \leq \lim S_n \leq 2$.

Exercice 16 Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k u_k$.

1. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que (S_n) converge.

Application :

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \leq \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

4. On pose $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $n \geq 1$. Montrer soigneusement que $(S_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 17 Soit (u_n) une suite de nombre réels.

1. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite convergente. Montrer que (u_n) converge.

2. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite majorée. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 18 Soit (u_n) une suite croissante de limite ℓ . On pose :

$$v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que (v_n) est croissante.
2. Établir que $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$.
3. En déduire que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Exercice 19 1. En exploitant la formule du binôme de Newton montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ est un entier pair.

2. En déduire que la suite de terme général $u_n = \sin\left((3 + \sqrt{5})^n \pi\right)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 20 Trouver un équivalent simple des suites suivantes.

1 $u_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{\ln(n) - 2n^2}$	2 $u_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{n + 1}$
3 $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$	4 $u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$
5 $u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$	6 $u_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$
7 $u_n = \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt{n^2 - n + 1}}$	8 $u_n = \frac{2n^3 - \ln(n) + 1}{n^2 + 1}$
9 $u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$	10 $u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$
11 $u_n = \frac{(1 - e^{1/n}) \sin \frac{1}{n}}{n^2 + n^3}$	12 $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

Exercice 21 Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = n \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2 + 1}\right)} \quad u_n = \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$u_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$$

Exercice 22 Soit (u_n) une suite réelle.

1. On suppose que $u_n \neq -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que : $\frac{u_n}{1 + u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \implies u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. On suppose que $\frac{u_n}{1 + u_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et (u_n) est bornée.
Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 23 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

1. Établir que pour tout $p > 1$,

$$\int_p^{p+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{p} \leq \int_{p-1}^p \frac{1}{x} dx.$$

2. En déduire la limite de (S_n) .

3. À l'aide du changement d'indice $\ell = k+1$, exprimer S_{n+1} en fonction de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Établir que $S'_{2n} = S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En déduire la limite de (S'_n) .

Exercice 24 1. Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ existe et la calculer.

Exercice 25 Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
 - a. Justifier que : $\lfloor \ell \rfloor < \ell < \lfloor \ell \rfloor + 1$.
 - b. Montrer que : $\lfloor u_n \rfloor \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lfloor \ell \rfloor$.
2. Trouver une suite réelle (u_n) convergeant vers un $\ell \in \mathbb{Z}$ telle que $(\lfloor u_n \rfloor)$ ne converge pas vers $\lfloor \ell \rfloor$.

Exercice 26 Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$, convergente. On veut montrer que (u_n) est stationnaire.

On note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

1. Justifier : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \frac{1}{2}$.
2. En déduire que : $\forall n \geq n_0, |u_n - u_{n_0}| < 1$.
3. Conclure que (u_n) est stationnaire.

Exercice 27 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, On pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx.$$

- a. Calculer I_0 .
 - b. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.
 - c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
 - d. En déduire que : $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!} = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Observons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = e$.

- a. Justifier que (a_n) et (b_n) sont strictement monotones et adjacentes.
 - b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < e < b_n$.
 - c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < e - a_n < \frac{1}{n!}$.
 - d. Construire une fonction en Python nommée NombreNeper de paramètre $\varepsilon > 0$ qui retourne une valeur approchée de e à la précision ε .
3. On désire montrer que $e \notin \mathbb{Q}$ et pour cela on raisonne par l'absurde en supposant $e = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
 - a. Vérifier que le nombre $q!(e - a_q)$ est entier.

- b. En déduire une contradiction et conclure.

Exercice 28 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ et $T_n = S_n + \frac{1}{(4n+4)!}$.

1. Montrer que $(S_n)_n$ est strictement croissante et que $(T_n)_n$ est strictement décroissante.
2. Que peut-on déduire quant à la convergence des deux suites. On note par L leur limite.
On se propose de montrer que L est irrationnel. Pour cela on raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{N}^*$ tels que $L = \frac{p}{z}$.

- a. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$r < \frac{p}{z} \cdot (4z+4)! < r+1$$

- b. Conclure que L est irrationnel.

Exercice 29 L'objectif de cet exercice est de voir trois méthodes différentes d'étude des suites récurrentes de type :

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

1. Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^3 + x_n}{5}.$$

- a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x_n \leq 2$.
- b. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- c. En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

2. Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{5}{x_n^2 + 4}.$$

- a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x_n \leq 2$.
- b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - 1| \leq \frac{3}{4} |x_n - 1|$.
- c. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
- d. En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + 3}{x_n + 1}.$$

- a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq x_n \leq 2$.
- b. Montrer que la suite $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- c. En déduire que la suite $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- d. Conclure que les suites $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.
- e. Montrer que les suites $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
- f. En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.