

Feuille d'exercices N°12

Suites usuelles

Exercice 1 Pour chacune des suites ci-dessous, exprimer le terme général en fonction de n .

- (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = -3$.
- (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_2 = \frac{3}{4}$ et de raison $r = \frac{1}{2}$.
- (w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_0 = 3$ et de raison $q = 4$.
- (z_n) est une suite géométrique de premier terme $z_1 = 5$ et de raison $q = -2$.

Exercice 2 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 3 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 = 0, u_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 4 On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1, u_1 = 8 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n.$$

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 5 On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 2, u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 5u_n.$$

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 6 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 = 2, u_1 = 4$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^4}{u_n^3}.$$

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Montrer que la suite de terme général $v_n = \ln(u_n)$ est récurrence linéaire homogène d'ordre 2.

3. Déterminer v_n en fonction de n .

4. Dédurre l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 7 Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_0 = 0, b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = -2a_n + b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 3a_n.$$

1. Démontrer que la suite $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
3. Exprimer a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer alors b_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$$

est géométrique.

3. Expliciter v_n en fonction.
4. Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 9 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 6u_n^5.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \ln(u_n)$$

est arithmético-géométrique.

3. Déterminer v_n en fonction de n pour tout entier n .

4. En déduire u_n en fonction de n pour tout entier n .

Exercice 10 On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \frac{3x_n - 1}{x_n + 5}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > -1$.
2. Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \frac{1}{x_n + 1}.$$

est arithmétique.

3. Déterminer le terme général de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n .
4. En déduire le terme général de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n .

Exercice 11 On considère les suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 1, y_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = -x_n + y_n \end{cases}$$

1. Vérifier que la suite de terme général $z_n = x_n + iy_n$ est géométrique.
2. Déterminer le terme général de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. En déduire les termes généraux des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 12 Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{5x_n - 2}{x_n + 2}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 1$.
2. Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$y_n = \frac{x_n - 2}{x_n - 1}.$$

est géométrique.

3. Déterminer le terme général de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n .
4. En déduire le terme général de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n .

Exercice 13 Soit $a, b \in \mathbb{C}^*$ distincts et on considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = ax_n + b^{n+1}.$$

1. Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \frac{x_n}{b^n}$$

est arithmético-géométrique.

2. Déterminer le terme général de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. En déduire le terme général de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 14 Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1, x_1 = e$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}x_n}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0$.
2. Déterminer le terme général de la suite $y_n = \ln x_n$.
3. En déduire le terme général de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 15 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1. Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n\sqrt{2} - n.$$

Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique et en déduire l'expression de v_n en fonction de n .

2. Calculer u_n en fonction de n .

3. Calculer $\sum_{k=0}^n u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 4$ et $v_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{7u_n + 2v_n}{3} + 1 \\ v_{n+1} = -4u_n - v_n + 2 \end{cases}$$

On définit ensuite les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\text{par : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_n = 3u_n + v_n \\ b_n = 2u_n + v_n \end{cases}.$$

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none">1. Montrer que (a_n) est arithmétique de raison 5.2. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \frac{b_n}{3} + 4$. | <ol style="list-style-type: none">4. En déduire l'expression de b_n en fonction de n.5. Exprimer u_n et v_n en fonction de a_n et b_n et en déduire les expressions de u_n et v_n. |
|--|---|