

Feuille d'exercices N°11

Nombres réels

Exercice 1 On rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \notin \mathbb{Q}.$$

Exercice 2 Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

Exercice 3 Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$:

$$\lfloor 2x + 1 \rfloor = 3$$

Exercice 4 Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$:

$$|x - 2| - |x + 3| = x^2 - 1$$

Exercice 5 Soient x et y deux réels quelconques.

1. Montrer, en utilisant l'inégalité triangulaire, que

$$2|x| \leq |x + y| + |x - y|.$$

En déduire que $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.

2. Démontrer :

$$1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$$

Exercice 6 1. (a) Énoncer la définition d'une fonction croissante sur $[0, +\infty[$.

(b) Énoncer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \frac{x}{1+x}$$

est croissante.

3. Montrer que $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$, pour tous $a, b \geq 0$.

4. Déduire que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

Exercice 7 Soient $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ des réels. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^n (\lambda x_k + y_k)^2.$$

1. Déterminer des réels A, B et C tels que $P(\lambda) = A\lambda^2 + 2B\lambda + C$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On exprimera A, B et C sous forme de sommes.

2. On suppose $A \neq 0$. P est donc un trinôme du second degré. Quel est le signe de $P(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$? Que peut-on en déduire sur le discriminant Δ de P ? En déduire l'inégalité suivante :

$$(CS) : \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right).$$

3. On suppose $A = 0$. Que peut-on en déduire sur les réels $x_1, \dots, x_n$? En déduire que l'inégalité (CS) est encore vraie.

4. En utilisant (CS), montrer que

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

5. **Application :** Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. En utilisant (CS), montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) \geq n^2.$$

Exercice 8 On considère la partie suivante de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ \frac{2n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Montrer que A est bornée.
2. Montrer que $\min A = 1$, puis déduire $\inf A$.
3. Dire pourquoi A admet une borne supérieure.
4. Montrer que $\sup A = 2$.
5. Montrer que A n'admet pas de plus grand élément.

Exercice 9 On considère la partie suivante de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}.$$

1. Montrer que A est bornée.
2. Montrer que $\max A = 1$, puis déduire $\sup A$.
3. Justifier que A admet une borne inférieure.
4. Montrer que $\inf A = 0$.
5. Montrer que A n'admet pas de plus petit élément.

Exercice 10 Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$.
2. a. Montrer que $A \cup B$ est majorée par $\max(\sup A, \sup B)$.
b. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et que

$$\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B).$$

- c. En exploitant la question 1, montrer que

$$\sup(A \cup B) \geq \max(\sup A, \sup B),$$

puis déduire que

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B).$$

Exercice 11 Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que $A + B$ est majorée par $\sup A + \sup B$.
2. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et que

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B.$$

3. Justifier que : $\forall a \in A, \forall b \in B, a + b \leq \sup(A + B)$.
4. Justifier que : $\forall b \in B, \sup(A) \leq \sup(A + B) - b$.
5. En déduire que : $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A + B)$.
6. conclure que : $\sup(A) + \sup(B) = \sup(A + B)$.

Exercice 12 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \forall (a, b) \in A \times B, a \leq b \\ \forall \varepsilon > 0, \exists (a, b) \in A \times B, b - a < \varepsilon \end{cases}$$

1. Montrer que A est majorée et B est minorée et que $\sup A \leq \inf B$
2. Montrer que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \inf B - \sup A \leq \varepsilon$.
3. En déduire que $\inf B \leq \sup A$, puis que $\sup A = \inf B$.

Exercice 13 Montrer que, pour tous $x > 1$ et $y > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \geq y$.

Exercice 14 Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor \sqrt{n^2 + n + 1} \rfloor$.

Exercice 15 1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

2. En déduire la partie entière de

$$S = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}} \right).$$

Exercice 16 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lfloor \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1} \rfloor = n^2 + n.$$

2. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ l'entier $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$ est-il le carré d'un entier.

Exercice 17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que $a_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier pair.
2. En déduire que la partie entière de $(2 + \sqrt{3})^n$ est un entier impair.

Exercice 18 Rappels :

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. On note

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

- On dit qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un **intervalle** de $\mathbb{R}$ si :

$$\forall a, b \in I, (a \leq b \implies [a, b] \subset I).$$

Soit I un de $\mathbb{R}$ non vide et borné.

1. Rappeler l'axiome de la borne supérieure.

- | | |
|--|---|
| <p>2. Justifier que I possède une borne supérieure et une borne inférieure. On pose donc $a = \inf I$ et $b = \sup I$.</p> <p>3. Montrer que $I \subset [a, b]$.</p> <p>4. On se propose de montrer que $]a, b[\subset I$. Soit donc $x \in]a, b[$.</p> <p style="margin-left: 20px;">a. Montrer qu'il existe $\alpha \in I$ tel que $\alpha < x$.</p> <p style="margin-left: 20px;">b. Montrer qu'il existe $\beta \in I$ tel que $\beta > x$.</p> <p style="margin-left: 20px;">c. En déduire que $x \in I$.</p> <p style="margin-left: 20px;">d. Conclure.</p> | <p>5. On veut montrer que $I = [a, b]$, $I =]a, b]$, $I = [a, b[$ ou $I =]a, b[$.</p> <p style="margin-left: 20px;">a. On suppose que $a, b \in I$, montrer que $I = [a, b]$.</p> <p style="margin-left: 20px;">b. On suppose que $a \notin I$ et $b \in I$, montrer que $I =]a, b]$.</p> <p style="margin-left: 20px;">c. On suppose que $a \in I$ et $b \notin I$, montrer que $I = [a, b[$.</p> <p style="margin-left: 20px;">d. On suppose que $a \notin I$ et $b \notin I$ montrer que $I =]a, b[$.</p> |
|--|---|