LYCEE MOHAMMED VI D'EXCELLENCE

Feuille d'exercices N°10
Géométrie Dans L'espace

Dans tous les exercices, sauf spécifications contraires, l'espace est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et les coordonnées des points sont données dans ce repère.

Exercice 1 *On considère les vecteurs* $\vec{u}(m,m,-1)$ *et* $\vec{v}(2-m,1,m-1)$. *Pour quelle(s) valeur(s) de* m *les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont ils colinéaires ? orthogonaux ?*

Exercice 2 *On considère les trois vecteurs* $\vec{u}(1,0,1)$, $\vec{v}(1,-2,-1)$ *et* $\vec{w}(2,-1,1)$. *Montrer que* $\vec{u}$,$\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *sont coplanaires.*

Exercice 3 *On considère les trois vecteurs* $\vec{u}(1,-2,-3)$, $\vec{v}(1,1,1)$ *et* $\vec{w}(1,0,0)$.

1. *Montrer que* $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ *est une base de l'espace.*
2. *Calculer les coordonnées du vecteur* $\vec{t}(-5,2,3)$ *dans la base* $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Exercice 4 *Soient* $\vec{u}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{k})$, $\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$ *et* $\vec{w}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})$. *Démontrer que* $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ *est une base orthonormée . Cette base est-elle directe ?*

Exercice 5 *Calculer le volume du parallélépipède défini par* $\vec{u}\,(-1,1,1)\,,\vec{v}\,(1,2,-1)$ *et* $\vec{w}=(2,0,3)$.

Exercice 6 *Soient* $\mathcal{P}$ *le plan d'équation cartésienne :* $x+2y-3z+4=0$ *et* $A(0,1,2)$, $B(-1,0,1), C(1,1,1)$ *trois points de l'espace.*

1. *Montrer que* A, B *et* C *ne sont pas alignés et déterminer une équation cartésienne du plan* $\mathcal{P}'$ *passant par ces points.*
2. *Montrer que* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *sont sécants selon une droite* $\mathcal{D}$.

Exercice 7 *Soit la droite* $\mathcal{D}$ *dont un système d'équations cartésiennes est :* $\begin{cases} x &= y+1 \\ z &= y \end{cases}$.
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ *orthogonal à* $\mathcal{D}$ *et passant par* $A(1,1,1)$.

Exercice 8 *On considère les deux droites suivantes :*

$$\mathcal{D}:\begin{cases} x=2z+1 \\ y=z-1 \end{cases} \qquad \mathcal{D}':\begin{cases} x=z+2 \\ y=3z-3 \end{cases}$$

1. *Les droites* $(\mathcal{D})$ *et* $(\mathcal{D}')$ *sont elles parallèles ?*
2. *Montrer que les deux droites suivantes sont coplanaires et former une équation cartésienne de leur plan.*

Exercice 9 *On considère la droite* $\mathcal{D}$ *passant par le point* $A=(1,-2,0)$ *et dirigée par* $\vec{u}=(1,1,-1)$. *Soit* $B=(0,1,-2)$ *un point de l'espace.*

1. *Calculer la distance de* B *à la droite* $\mathcal{D}$.
2. *Déterminer les coordonnées du point* H, *projeté orthogonal de* B *sur* $\mathcal{D}$. *Retrouver la distance de* B *à la droite* $\mathcal{D}$.

Exercice 10 *On considère les plans* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *d'équations respectives* $x-y+z+1=0$ *et* $2x+y-z-1=0$.

1. *Vérifier que ces deux plans ne sont pas parallèles.*
2. *Déterminer une paramétrisation de leur intersection* $\mathcal{D}$.
3. *Donner une équation cartésienne du plan* $\mathcal{Q}$ *passant par* $A=(1,1,0)$ *et perpendiculaire aux deux plans* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$.

Exercice 11 *On considère le plan* $\mathcal{P}$ *représenté paramétriquement par :*

$$\mathcal{P}:\begin{cases} x &= 2+\lambda-\mu \\ y &= 3-\lambda+2\mu \\ z &= 1+2\lambda+\mu \end{cases} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

1. *Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.*
2. *Déterminer la distance du point $A(1,1,1)$ au plan $\mathcal{P}$.*
3. *Donner une équation cartésienne de la droite passant par le point A et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.*

Exercice 12 *On considère la droite d'équation :*

$$\begin{cases} x+y-z+1 & = & 0 \\ 2x-y+z-2 & = & 0 \end{cases}$$

Déterminer la distance du point $\Omega(1,2,1)$ à cette droite.

Exercice 13 *Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par les points $A(1,-2,-1)$ et $B(3,-5,-2)$.*

1. *Donner un système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$.*
2. *Soit $\mathcal{D}'$ la droite d'équations paramétriques*

$$\begin{cases} x & = & 2-t \\ y & = & 1+2t \\ z & = & t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que les droite $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

3. *$\mathcal{P}$ est le plan d'équation $4x+y+5z+3=0$.*
   a. *Démontrer que $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$.*
   b. *Démontrer que $\mathcal{P}$ coupe la droite $\mathcal{D}'$ en un point C que vous déterminerez.*
4. *Δ est la droite passant par C et dirigée par le vecteur $\vec{v}(1,1,-1)$.*
   a. *Démontrer que Δ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires et orthogonales.*
   b. *Démontrer que Δ coupe perpendiculairement $\mathcal{D}$ en un point E dont vous déterminez les coordonnées.*

Exercice 14 *Soient $A(5,-1,4)$ et $B(2,0,1)$. Donner une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$.*

Exercice 15 *Soient $\Omega(4,1,2)$ et $A(-1,1,2)$.*

1. *Déterminer une équation de la sphère de centre Ω et passant par A puis donner une équation du plan tangent en A à cette sphère.*
2. *Montrer que l'ensemble de représentation cartésienne*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-8x-2y-4z=4 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

est un cercle dont on précisera le rayon et le centre.

Exercice 16 *On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations respectives $3x-4y+1=0$ et $2x-3y+6z-1=0$. Déterminer l'ensemble des points équidistants de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.*

Exercice 17
1. *Montrer que $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$ est l'équation d'une sphère $\mathcal{S}$ dont on déterminera le centre et le rayon.*
2. *Étudier l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z-1=0$. On précisera les éléments géométriques de cette intersection.*

Exercice 18 *On considère la sphère $\mathcal{S}$ d'équation :*

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-11=0$$

ainsi que le plan $\mathcal{P}$ d'équation :

$$3x-4z+19=0.$$

1. *Donner le centre Ω et le rayon R de $\mathcal{S}$.*
2. *Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{S}$.*
3. *Donner une représentation paramétrique de la droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{P}$ qui passe par Ω.*
4. *Trouver les coordonnées des points M et N de $\mathcal{S}$ respectivement le plus proche et le plus éloigné de P en précisant les distances correspondantes (ces points sont sur Δ).*

Exercice 19 *Montrer qu'il existe une et une seule sphère, dont on déterminera le rayon et le centre, intersectant les plans $x=1$ et $z=-1$ suivant les* *cercles d'équations cartésiennes :*

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y^2 - 2y + z^2 + 6z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{C}_2 : \begin{cases} z = -1 \\ x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

Exercice 20 *Soient A, B, C trois points deux à deux distincts. En utilisant les propriétés vérifiées par le produit vectoriel, montrer que, quelque soit le point M :*

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

Exercice 21 *Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Montrer* formule du double produit vectoriel *:*

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}.$$

Indication : Choisissez une base dans laquelle les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ont le maximum des zéros.

Exercice 22 *Soient quatre vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ de l'espace.*

1. *Montrer* l'identité de Jacobi *:*

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{0}.$$

Indication : on pourra utiliser la formule du double produit vectoriel de l'exercice précédent.

2. *Montrer que*

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{a}.\vec{d} \\ \vec{b}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix}.$$

3. *Montrer que*

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})\vec{c} - \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{d}.$$

Exercice 23 *On considère deux vecteurs $(\vec{a}, \vec{b})$ de l'espace. On veut résoudre l'équation vectorielle*

$$\vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}.$$

1. *Soit $\vec{x}$ une solution.*
   a. *Vérifier que : $\vec{a}.\vec{x} = \vec{a}.\vec{b}$.*
   b. *En utilisant la formule du double produit vectoriel, montrer que : $\vec{a} \wedge \vec{x} + (\vec{a}.\vec{x})\vec{a} - \|\vec{a}\|^2\vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.*
   c. *En déduire l'expression de $\vec{x}$.*
2. *Réciproquement, montrer que le vecteur $\vec{x}$ trouvé dans la question précédente est bien une solution de l'équation.*

Exercice 24 *Soient quatre vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ de l'espace.. Montrer que*

$$(\vec{a}.\vec{c}) \times (\vec{b}.\vec{c}) + (\vec{a} \wedge \vec{c}).(\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{b}) \times \|\vec{c}\|^2.$$