Feuille d'exercices
Rappels Calculatoires

Exercice 1 *Réécrire les expressions suivantes sans radical au dénominateur :*

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \quad ; \quad B = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1} \quad ; \quad C = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$$

Exercice 2 *Simplifier* $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Exercice 3 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Simplifier* A_n *et* B_n *où :*

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \quad ; \quad B_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Exercice 4 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $0 \leq b \leq a$.

1. *Calculer le carré de* $A = \sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}} + \sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$.
2. *En déduire que*

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{14} \text{ et } \sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}} = \sqrt{14}$$

.

Exercice 5 *Supposons que* $a, b \geq 0$. *Montrer que* $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$.
Préciser pour quels couples (a, b) *on a l'égalité.*

Exercice 6

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que* $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \geq \frac{2}{n+1}$.
2. *Soit* $x \geq 0$. *Montrer que* $\sqrt{x}+\sqrt{x+2} \leq 2\sqrt{x+1}$.
3. *Soient* $1 < x$ *et* $y < 1$. *Montrer que* $xy - x - y < -1$.

Exercice 7 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}^*$. *Simplifier les réels suivants :*

$$A = \left(\left(a^2b\right)^3\right)^5 \ ; B = \left(\frac{a}{b^2}\right)^3 \left(\frac{b}{a}\right)^5$$

Exercice 8 *Factorier le trinôme :* $3x^2 - 5x + 2$.

Exercice 9 *On considère sur* $\mathbb{R}$ *l'équation (E) suivante :*

$$6x^3 + 7x^2 - x - 2 = 0$$

1. *Vérifier que* -1 *est une solution de l'équation (E).*
2. *Montrer qu'il existe un polynôme* P *de degré 2 tel que pour tout réel* x *on a :*

$$6x^3 + 7x^2 - x - 2 = (x+1)P(x)$$

3. *En déduire les solutions de l'équation (E).*

Exercice 10 *Résoudre, suivant les valeurs du réel* m, *sur* $\mathbb{R}$ *l'équation suivante :*

$$x^2 + (2m+1)x + 2m = 0$$

Exercice 11 *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'inéquation suivante*

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{x+2}{x+3}$$

Exercice 12

1. (a) *Simplifier* $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
   (b) *Calculer alors* $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. *Proposer une autre façon pour calculer les deux valeurs.*

Exercice 13

1. *Soit* x *un réel.*
   (a) *Rappeler l'expression de* $\cos(2x)$ *en fonction de* $\cos(x)$.
   (b) *Exprimer alors* $\cos(3x)$ *en fonction de* $\cos(x)$.
   (c) *Rappeler l'expression de* $\sin(2x)$ *en fonction de* $\sin(x)$ *et* $\cos(x)$.
   (d) *En déduire alors un expression de* $\sin(3x)$ *sous forme de produit de* $\sin(x)$ *et une expression en fonction de* $\cos(x)$.
   (e) *À l'aide des questions précédentes, justifier que*

$$\cos(5x) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x)$$

2. *Soit* $a = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.
   (a) *Justifier que* $16a^5 - 20a^3 + 5a = 0$, *et puis que* $16a^4 - 20a^3 + 5 = 0$.
   (b) *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation* $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$.
   (c) *En déduire deux valeurs possibles pour* a.
   (d) *Justifier que* $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) < a$ *et que* $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (e) *En déduire la valeur de* $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.
3. *Déterminer alors successivement les valeurs de* $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 14

1. *Soit* x *un réel. En écrivant* $\cos^4(x) = \left(\cos^2(x)\right)^2$, *montrer que*

$$\cos^4(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$$

On dit alors qu'on a ***linéarisé*** $\cos^4(x)$.

2. *En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la foction $x \longmapsto \cos^4(x)$.*

Exercice 15 ***(Équations trigonométriques)***
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\sin(x) + \cos(x) = 0$$
$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$
$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$
$$\sin(3x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Exercice 16 *Soit x un réel.*

1. *Montrer que*
$$1 + \sin(x) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

2. *Montrer que*
$$\cos^2(x) + \sin^4(x) = \sin^2(x) + \cos^4(x)$$

Exercice 17 ***(Complément du cours)***
Soit $x \in]-\pi, \pi[$. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Montrer que

(a) $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$, *si $x \notin \{-\pi/2, \pi/2\}$.*

(b) $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

(c) $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Exercice 18 *Résoudre sur $]-\pi, \pi]$ les inéquations suivantes :*

1. $2\cos(x) \leq \sqrt{2}$.

2. $2\sin(x) \geq -1$.

3. $\sqrt{3}\tan(x) \geq 1$.