LYCEE MOHAMMED VI D'EXCELLENCE

Feuille d'exercices N°0

Exercice 1 *Réécrire les expressions suivantes sans radical au dénominateur :*

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \quad ; \quad B = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1} \quad ; \quad C = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$$

Exercice 2 *Simplifier* $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Exercice 3 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Simplifier* A_n *et* B_n *où :*

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \quad ; \quad B_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Exercice 4 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $0 \leq b \leq a$.

1. *Calculer le carré de* $A = \sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}} + \sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$.
2. *En déduire que*

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{14} \text{ et } \sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}} = \sqrt{14}$$

.

Exercice 5 *Supposons que* $a, b \geq 0$. *Montrer que* $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Donner un exemple de (a, b) *où on n'a pas l'égalité.*

Exercice 6

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que* $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \geq \frac{2}{n+1}$.
2. *Soit* $x \geq 0$. *Montrer que* $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} \geq 2\sqrt{x+1}$.
3. *Soient* $1 < x$ *et* $y < 1$. *Montrer que* $xy - x - y > -1$.

Exercice 7 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}^*$. *Simplifier les réels suivants :*

$$A = \left(\left(a^2 b\right)^3\right)^5 \ ; B = \left(\frac{a}{b^2}\right)^3 \left(\frac{b}{a}\right)^5$$

Exercice 8 *Factorier le trinôme :* $12x^2 - 5x + 2$.

Exercice 9 *On considère sur* $\mathbb{R}$ *l'équation (E) suivante :*

$$6x^3 + 7x^2 - x - 2 = 0$$

1. *Vérifier que* -1 *est une solution de l'équation (E).*
2. *Montrer qu'il existe un polynôme* P *de degré* 2 *tel que pour tout réel* x *on a :*

$$6x^3 + 7x^2 - x - 2 = (x+1)P(x)$$

3. *En déduire les solutions de l'équation (E).*

Exercice 10 *Résoudre, suivant les valeurs du réel* m, *sur* $\mathbb{R}$ *l'équation suivante :*

$$x^2 + (2m+1)x + 2m = 0$$

Exercice 11 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante*

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{x+2}{x+3}$$

Exercice 12

1. (a) *Simplifier* $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
   (b) *Calculer alors* $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. *Proposer une autre façon pour calculer les deux valeurs.*

Exercice 13

1. *Soit x un réel.*
   (a) *Rappeler l'expression de* $\cos(2x)$ *en fonction de* $\cos(x)$.
   (b) *Exprimer alors* $\cos(3x)$ *en fonction de* $\cos(x)$.
   (c) *Rappeler l'expression de* $\sin(2x)$ *en fonction de* $\sin(x)$ *et* $\cos(x)$.
   (d) *En déduire alors un expression de* $\sin(3x)$ *sous forme de produit de* $\sin(x)$ *et une expression en fonction de* $\cos(x)$.
   (e) *À l'aide des questions précédentes, justifier que*
   $$\cos(5x) = 10\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x)$$
2. *Soit* $a = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.
   (a) *Justifier que* $16a^5 - 20a^3 + 5a = 0$, *et puis que* $16a^4 - 20a^3 + 5 = 0$.
   (b) *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation* $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$.
   (c) *En déduire deux valeurs possibles pour a.*
   (d) *Justifier que* $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) < a$ *et que* $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (e) *En déduire la valeur de* $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.
3. *Déterminer alors successivement les valeurs de* $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 14

1. *Soit x un réel. En écrivant* $\cos^4(x) = \left(\cos^2(x)\right)^2$, *montrer que*
   $$\cos^4(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$$
   *On dit alors qu'on a **linéarisé*** $\cos^4(x)$.
2. *En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la foction* $x \longmapsto \cos^4(x)$.

Exercice 15 ***(Équations trigonométriques)***
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\sin(x) + \cos(x) = 0$$

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin(3x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Exercice 16 *Soit x un réel.*

1. *Montrer que*
$$1+\sin(x)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$
2. *Montrer que*
$$\cos^2(x)+\sin^4(x)=\sin^2(x)+\cos^4(x)$$

Exercice 17 ***(Complément du cours)***
Soit $x\in]-\pi,\pi[$. On pose $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Montrer que

(a) $\tan(x)=\dfrac{2t}{1-t^2}$.

(b) $\cos(x)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

(c) $\sin(x)=\dfrac{2t}{1+t^2}$.

Exercice 18 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :*

1. $2\cos(x)\leq\sqrt{2}$.
2. $2\sin(x)\geq-1$.
3. $\sqrt{3}\tan(x)\geq 1$.

Exercice 19
1. *Étudier la limite en $+\infty$ de* $x^2-4\ln(x)+e^{3x}$.
2. *Étudier la limite en $\pm\infty$ de* $3e^{2x}-2e^{3x}$.
3. *Étudier la limite en $+\infty$ de* $\dfrac{x^4-5\ln(x)+4e^x}{x^4-2e^x+\sqrt{x}}$.
4. *Étudier la limite en $\pm\infty$ de* $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.
5. *Étudier la limite en $\pm\infty$ de* $\dfrac{\sqrt{x^2-1}+3x}{\sqrt{x^2+1}}$.
6. *Étudier la limite en $+\infty$ de* $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$.

Exercice 20 *Calculer les limites en $+\infty$ des quantités suivantes :*

1. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.
2. $x-\sqrt{x^2+x}$.
3. $\sqrt{x^2+4x+3}-x$.

Exercice 21 *Calculer les limites en 0 des quantités suivantes :*

1. $\dfrac{\sin(ax)}{x}$, *$a\in\mathbb{R}^*$.*
2. $\dfrac{\ln(1+ax)}{x}$, *$a\in\mathbb{R}^*$.*
3. $\dfrac{e^{ax}-1}{x}$, *$a\in\mathbb{R}^*$.*
4. $\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$, *avec $a\neq b$ deux réels non nuls.*
5. $\dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$, *avec $a\neq b$ deux réels non nuls.*
6. $\dfrac{\ln(1+ax)}{\sin(bx)}$, *avec $a\neq b$ deux réels non nuls.*

Exercice 22

Exercice 23 *Calculer les limites en $+\infty$ des quantités suivantes :*

1. $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$, *avec* a *un réel.*
2. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.
3. $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.
4. $x^{\frac{1}{x}}$.
5. $x^{\frac{a}{\ln(x)}}$, *avec* a *un réel.*
6. $x^{\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}}$.

Exercice 24 *Calculer les limites en* 0^+ *des quantités suivantes :*

1. $(\sin(x))^x$.
2. $x^{\frac{a}{\ln(x)}}$, *avec* a *un réel.*
3. $x^{\frac{a}{\ln(x)}}$, *avec* a *un réel.*
4. $x^{\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}}$.

Exercice 25 *Dériver formellement (i.e. sans préoccuper des questions des domaines de définition ou dérivation) les fonctions suivanes :*

1. $f(x) = x\ln(x) - x$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.
3. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, *avec* a, b, c *et* d *des réels.*
4. $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+3}{(x-3)^2}$.
5. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.
7. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
8. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$.
9. $f(x) = \dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$.

Exercice 26 *Dériver formellemnt les fonctions suivantes :*

1. $\sin^5(x)$.
2. $\cos^4(x)$.
3. $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)}$.
4. $f(x) = \sqrt{x^4-2x+3}$.
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.
6. $f(x) = e^{x^3+x+4}$.
7. $f(x) = \sin(x^2)$.
8. $f(x) = x^x$
9. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$.
10. $f(x) = \ln(\sin(x)$.
11. $f(x) = \ln(\cos(x)$.
12. $f(x) = \ln(e^x+1)$.
13. $f(x) = \ln\left(\ln(x)\right)$.
14. $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.
15. $f(x) = \dfrac{\cos\left(\ln(x)\right)}{x}$.
16. $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 27 *Déterminer une primitive de chacune des fonctions ci-dessous sur l'intervalle indiqué :*

1. ***Produit :***

   (a) $f(x) = \cos(x) - x$ *sur* $\mathbb{R}$.

   (b) $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \dfrac{1}{x^2+1}$ *sur* $\mathbb{R}$.

2. ***Sous forme*** $u'(x).u^n(x)$ *:*

   (a) $f(x) = \cos(x).\left(2\sin(x)+1\right)^4$ *sur* $\mathbb{R}$.

   (b) $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$ *sur* $]0,+\infty[$.

   (c) $f(x) = \dfrac{\ln^4(x)}{x}$ *sur* $]0,+\infty[$.

   (d) $f(x) = \sin^3(x)$ *sur* $\mathbb{R}$.

3. ***Sous forme*** $\dfrac{u'(x)}{u^n(x)}$ *:*

   (a) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ *sur* $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   (b) $f(x) = \dfrac{2}{(3x-4)^2}$ *sur* $\left]\dfrac{4}{3}, +\infty\right[$ *sur* $\mathbb{R}$.

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x)^2}$ *sur* $]1,+\infty[$.

4. ***Sous forme*** $\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ *:*

   (a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ *sur* $]-1,1[$.

   (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{3x^2+6x+5}}$.

5. ***Sous forme*** $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ *:*

   (a) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ *sur* $\mathbb{R}$.

   (b) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ *sur* $]-1,1[$ *puis sur* $]1,+\infty[$.

   (c) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *sur* $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ *sur* $]0,+\infty[$.

6. ***Sous forme*** $u'(x)e^{u(x)}$ *:*

   (a) $f(x) = xe^{-x^2}$ *sur* $\mathbb{R}$.

   (b) $f(x) = e^{x+e^x}$ *sur* $\mathbb{R}$.

7. ***Composée :***

   (a) $f(x) = x\sin(x^2)$ *sur* $\mathbb{R}$.

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ *sur* $]0,+\infty[$.

   (c) $f(x) = \dfrac{\sin(\ln(x))}{x}$ *sur* $]0,+\infty[$.