

Feuille d'exercices

Rappels Calculatoires

Exercice 1 Réécrire les expressions suivantes sans radical au dénominateur :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \quad ; \quad B = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1} \quad ; \quad C = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$$

Exercice 2 Simplifier $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier A_n et B_n où :

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \quad ; \quad B_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Exercice 4 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq b \leq a$.

1. Calculer le carré de $A = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$.

2. En déduire que

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{14} \text{ et } \sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}} = \sqrt{14}$$

Exercice 5 Supposons que $a, b \geq 0$. Montrer que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Préciser pour quels couples (a, b) on a l'égalité.

Exercice 6 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \geq \frac{2}{n+1}$.

2. Soit $x \geq 0$. Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} \leq 2\sqrt{x+1}$.

3. Soient $1 < x$ et $y < 1$. Montrer que $xy - x - y < 1$.

Exercice 7 Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Simplifier les réels suivants :

$$A = \left((a^2b)^3 \right)^5 \quad ; \quad B = \left(\frac{a}{b^2} \right)^3 \left(\frac{b}{a} \right)^5$$

Exercice 8 Factoriser le trinôme : $3x^2 - 5x + 2$.

Exercice 9 On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) suivante :

$$6x^3 + 7x^2 - x - 2 = 0$$

1. Vérifier que -1 est une solution de l'équation (E).

2. Montrer qu'il existe un polynôme P de degré 2 tel que pour tout réel x on a :

$$6x^3 + 7x^2 - x - 2 = (x+1)P(x)$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 10 Résoudre, suivant les valeurs du réel m , sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$x^2 + (2m+1)x + 2m = 0$$

Exercice 11 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{x+2}{x+3}$$

Exercice 12 1. (a) Simplifier $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

(b) Calculer alors $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. Proposer une autre façon pour calculer les deux valeurs.

Exercice 13



1. Soit x un réel.

(a) Rappeler l'expression de $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.

(b) Exprimer alors $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.

(c) Rappeler l'expression de $\sin(2x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

(d) En déduire alors une expression de $\sin(3x)$ sous forme de produit de $\sin(x)$ et une expression en fonction de $\cos(x)$.

(e) À l'aide des questions précédentes, justifier que

$$\cos(5x) = 16 \cos^5(x) - 20 \cos^3(x) + 5 \cos(x)$$

2. Soit $a = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

(a) Justifier que $16a^5 - 20a^3 + 5a = 0$, et puis que $16a^4 - 20a^2 + 5 = 0$.

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$.

(c) En déduire deux valeurs possibles pour a .

(d) Justifier que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) < a$ et que $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(e) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

3. Déterminer alors successivement les valeurs de $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 14 1. Soit x un réel. En écrivant $\cos^4(x) = (\cos^2(x))^2$, montrer que

$$\cos^4(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x)$$

On dit alors qu'on a **linéarisé** $\cos^4(x)$.

2. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos^4(x)$.

Exercice 15 ((Équations trigonométriques)) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\sin(x) + \cos(x) = 0$$

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin(3x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Exercice 16 Soit x un réel.

1. Montrer que

$$1 + \sin(x) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

2. Montrer que

$$\cos^2(x) + \sin^4(x) = \sin^2(x) + \cos^4(x)$$

Exercice 17 ((Complément du cours)) Soit $x \in]-\pi, \pi[$. On pose $t = \tan \left(\frac{x}{2} \right)$. Montrer que

(a) $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$, si $x \notin \{-\pi/2, \pi/2\}$.

(b) $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

(c) $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$.

Exercice 18 Résoudre sur $] -\pi, \pi]$ les inéquations suivantes :

1. $2 \cos(x) \leq \sqrt{2}$.

2. $2 \sin(x) \geq -1$.

3. $\sqrt{3} \tan(x) \geq 1$.