

## Devoir Libre 1

- La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.
- Le sujet de ce devoir est composé de 5 exercices indépendants les uns des autres.

### Exercice 1 Étude d'une fonction

On considère la fonction d'expression  $f(x) = x \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right)$ .

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- Étudier la parité de la fonction  $f$ .
- Justifier qu'il est possible de restreindre le domaine d'étude à  $D = ]1, +\infty[$ .
- (a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .  
(b) Vérifier que  $f(x) = -\frac{2x}{x+1} \frac{\ln \left( 1 - \frac{2}{x+1} \right)}{-\frac{2}{x+1}}$ .  
(c) En déduire que  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote en l'infini dont on donnera une équation.
- (a) Montrer que :  $\forall x \in D, \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{2x}{x^2-1} \geq 0$ .  
(b) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $D$  en précisant les limites aux bords.  
(c) En déduire l'allure de sa courbe représentative.

### Exercice 2 Équations et Inéquations

- Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation suivante de paramètre réel  $m$  :

$$2mx - 3 = x + 5m$$

- Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation suivante de paramètre réel  $m$  :

$$x^2 + mx - 2m^2 = 0$$

- Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :

$$6x^2 - 7x + 2 \geq 0$$

- Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :

$$x^3 < x$$

- Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :

$$\frac{2x-3}{x^2-4} \leq 1$$

- Sachant que  $2 \leq a \leq 3$  et que  $1 \leq b \leq 2$ , encadrer  $a^2 - \frac{2}{b}$  par deux **nombre entiers**.

- Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs **distincts**.

(a) Montrer que :  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$ .

(b) Montrer que :  $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ .

### Exercice 3 Trigonométrie

1. Calculer les valeurs suivantes :

(a)  $\cos\left(\frac{145\pi}{6}\right)$

(b)  $\tan\left(\frac{227\pi}{3}\right)$

(c)  $\sin\left(-\frac{91\pi}{4}\right)$

2. Résoudre les équations suivantes :

(a)  $\sin(2x) = \sin(x)$

(b)  $\cos(x) = \sin(3x)$

(c)  $\cos(2x) - \sin(2x) = 1$

### Exercice 4 Calculs de limites

1. Calculer la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(x))}{\tan(6x)}$$

2. Calculer la limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

3. Préciser le réel  $a > 0$  tel que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{7x} = e^{2023}$$

4. Trouver les couples  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  pour que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - (ax + b)\right) = 3$$

### Exercice 5 Calculs de Dérivées et Primitives

1. Dériver formellement les expressions suivantes ci-dessous, en veillant à simplifier les résultats au maximum :

(a)  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{(x-3)^2}$

(b)  $g(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(c)  $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

2. Calculer :

(a)  $\int \sin(2x)e^{\cos(2x)} dx$

(c)  $\int x \sin(x) dx$

(b)  $\int \frac{1}{x \ln^3(x)} dx$

(d)  $\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$

*Bon Courage*