Chapitre 5 : Logique et Raisonnement Partie II

1 Propositions logiques

1.1 Assertions

Définition 1

On appelle **assertion** toute phrase mathématique à laquelle on peut attribuer une et une seule **valeur de vérité**, à savoir **vrai** (V en abrégé) ou **faux** (F en abrégé).

Remarque 1 *Parfois on note* 1 *(resp.* 0*) au lieu de* V *pour indiquer que l'assertion est vraie (resp. fausse).*

Définition 2

Une assertion vraie est appelée **proposition**; on dit que qu'on a P, ou que P est vraie.
Selon l'importance qu'on donne à la proposition, celle-ci pourra aussi porter le nom de : **théorème**, **corollaire**, **lemme**,..

Exemples 1

- *(*4 *est un nombre positif) est une assertion vraie.*
- *(*4 *est un nombre négatif) est une assertion fausse.*
- *(*$\sqrt{2}$*) n'est pas une assertion car elle n'est même pas une phrase.*
- *Soit* $x \in \mathbb{R}$*.*
  ($\sqrt{x} \geq 0$*) est une assertion seulement si* $x \geq 0$*;*
  car si $x < 0$*,* $\sqrt{x}$ *n'existe pas et (*$\sqrt{x} \geq 0$*) n'a donc pas de sens.*
- *Soit* $x \in \mathbb{R}$*.*
  ($x + 1 > 0$*) est une assertion vraie si* $x > -1$*, et est une assertion fausse si* $x \leq -1$*.*

Remarque 2 *Lorsque la valeur de vérité d'une assertion* P *dépend des valeurs prises par un paramètre* x*, on note souvent celle-ci* $P(x)$ *pour le signaler.*

Exercice 1

1. $P(x) = x > 0$ *est une assertion dépendant d'un paramètre* x *réel.*
2. $P(2)$ *est une assertion vraie.*
3. $P(-2)$ *est une assertion fausse.*

1.2 Assertions équivalentes

Définition 3

Soient P et Q deux assertions.
On dit que P est **équivalente** à Q, ou que P et Q sont **équivalentes**, si P et Q ont la même valeur de vérité. On présente ce cas par la donnée de l'assertion P $\Longleftrightarrow$ Q.

Exemples 2

- *x étant un réel positif . $(x = x^2 + 1)$ est équivalente à $(x^2 - x + 1 = 0)$.*
- *$(4 > 0)$ n'est pas équivalente à $(2 < 0)$.*

Remarque 3 *Table de vérité de l'équivalence*

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Remarque 4 *Pour exprimer que $P \Longleftrightarrow Q$ est vraie, on peut utiliser l'une des expressions suivantes :*

(1) $P \Longleftrightarrow Q$.

*(2) P **équivaut** à Q.*

*(3) P **si et seulement si** Q.*

*(4) Pour que P **il faut et il suffit** qu'on ait Q.*

*(5) P est une **condition nécessaire et suffisante** (CNS) pour qu'on ait Q.*

1.3 Négation

Définition 4

On appelle **négation** d'une assertion P l'assertion, notée **non(P)** (ou par $\neg$P), définie comme étant vraie lorsque P est fausse et inversement.
On peut aussi dire que l'assertion non(P) est définie par la table de vérité :

P	non(P)

Exercice 2

1. *La négation de $x \geqslant 0$ est*
2. *La négation de $x = y$ est*

2 Connecteurs binaires usuels

Les connecteurs **binaires** opèrent eux sur deux assertions : ils permettent d'associer à deux assertions P et Q, de nouvelles assertions.

2.1 Conjonction et disjonction

Définition 5

Soient P et Q deux assertions.

1. On appelle **conjonction** de P et Q l'assertion notée **P et Q** définie comme étant vraie lorsque P et Q le sont toutes les deux.
2. On appelle **disjonction** de P et Q l'assertion notée **P ou Q** définie comme étant vraie lorsqu'au moins l'une des deux l'est).

On a donc :

P	Q	P et Q	P ou Q
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

Exercice 3 $0 < x < 1$ *est la conjonction de*

Remarque 5 *Si **P ou Q** est vraie et **Q** est fausse alors nécessairement **P** est vraie.*

2.2 Implications

Définition 6

Soient P et Q deux assertions.
On définit l'assertion **P $\Longrightarrow$ Q**, qu'on lit **P implique Q**, comme étant fausse dans le seul cas où P est vraie et Q est fausse. On a donc :

P	Q	P$\Longrightarrow$ Q
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Remarque 6 *1. Si P est fausse, alors P$\Longrightarrow$Q est toujours vraie.*

2. *Si P est vrai, alors P$\Longrightarrow$Q n'est vraie que lorsque Q est vraie.*
3. *Ainsi, pour montrer que P$\Longrightarrow$Q est vraie il suffit de montrer que Q est vraie dans le cas où P est vraie, ce qui revient à* ***supposer que P est vraie et de montrer sous cette hypothèse que Q est vraie****.*

Rédaction

Quand on veut montrer que P$\Longrightarrow$Q est vraie, on procède souvent ainsi :

ou bien on procède par des implications successives :

$$P \Longrightarrow P_1 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow P_n \Longrightarrow Q$$

Remarque 7 *L'implication P$\Longrightarrow$Q peut s'exprimer par :*

1. *P* ***implique*** *Q.*
2. *P* ***entraîne*** *Q.*
3. ***Si*** *P,* ***alors*** *Q.*
4. *Q est* ***conséquence*** *de P.*
5. *Pour que P* ***il faut que*** *Q.*

6. *Q est une **condition nécessaire** (CN) pour P.*
7. *Pour que Q **il suffit que** P.*
8. *P est une **condition suffisante** (CS) pour Q.*

Proposition 1

1. P $\Longrightarrow$ Q et (non P ou Q) sont équivalentes.
2. **(P$\Longleftrightarrow$Q)** et **(P$\Longrightarrow$Q et Q$\Longrightarrow$P)** sont équivalentes.
3. **(P$\Longleftrightarrow$Q)** et **(non(P)$\Longleftrightarrow$non(Q))** sont équivalentes.

Preuve. 1

P	Q	$P\Longleftrightarrow Q$	$P\Longrightarrow Q$	$Q\Longrightarrow P$	$P\Longrightarrow Q$ et $Q\Longrightarrow P$
1	*1*				
1	*0*				
0	*1*				
0	*0*				

P	Q	$P\Longleftrightarrow Q$	$(non(P)$	$(non(Q)$	$(non(P)\Longleftrightarrow non(Q))$
1	*1*				
1	*0*				
0	*1*				
0	*0*				

Remarque 8 *Pour montrer que l'équivalence $P\Longleftrightarrow Q$ est vraie, on a au moins trois méthodes :*

1. *Raisonner de P à Q au moyen d'un raisonnement dont chaque étape est une équivalence :*

$$P \Longleftrightarrow P_1 \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow P_n \Longleftrightarrow Q$$

2. *Montrer $P\Longrightarrow Q$, puis $Q\Longrightarrow P$.*
3. *Montrer que $P\Longrightarrow Q$, puis $non(P)\Longrightarrow non(Q)$*

Proposition 2

1. non(non(P)) $\Longleftrightarrow$ P.
2. non(P et Q) $\Longleftrightarrow$ (non(P) ou non(Q)).
3. non(P ou Q) $\Longleftrightarrow$ (non(P) et non(Q)).
4. non((P$\Longrightarrow$Q) $\Longleftrightarrow$ (P et non(Q)).

3 Quantificateurs

Soient E un ensemble et $\mathrm{P}(x)$ une assertion dépendante d'un élément $x \in E$.

3.1 Définitions

Définition 7

- Le symbole '$\forall$' est appelé **quantificateur universel**.
- On définit l'assertion $\forall x \in E, \mathrm{P}(x)$ comme étant vraie lorsque $\mathrm{P}(x)$ est vraie pour tout x dans E.
  Cette assertion se lit : **Pour tout x dans E on a $\mathrm{P}(x)$** , ou **Quel que soit x dans E, on a $\mathrm{P}(x)$**.

Exercice 4 *1.* $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$

2. $\forall x \in [-1, 1], x^2 \leqslant 1$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leqslant 1$

Remarque 9 *Écrire $\forall x, \mathrm{P}(x)$ est insuffisant !*

Définition 8

- On définit le **quantificateur existentiel** '$\exists$'.
- On définit l'assertion $\exists x \in E, \mathrm{P}(x)$ comme étant vraie lorsque $\mathrm{P}(x)$ est vraie pour au moins un x dans E.
  Cette assertion se lit : **Il existe (au moins un) x dans E tel que $\mathrm{P}(x)$** .

Exercice 5 *1.* $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$

2. $\exists x \in [2, 3], x^2 = 1$

Remarque 10 *1. Quand on veut montrer: $\forall x \in E, \mathrm{P}(x)$, on commence généralement la rédaction par*

2. La lettre affectée par un quantificateur est muette ; elle peut être remplacée par n'importe quelle lettre :

$$(\forall x \in E,\, \mathrm{P}(x)) \Longleftrightarrow (\forall y \in E,\, \mathrm{P}(y))$$

$$(\exists x \in E,\, \mathrm{P}(x)) \Longleftrightarrow (\exists y \in E,\, \mathrm{P}(y))$$

Exercice 6 *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 7 *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R},\, \exists z \in \mathbb{R},\, z > x$.

3.2 Négation

Proposition 3

1. $\mathrm{non}(\forall x \in E,\, \mathrm{P}(x)) \Longleftrightarrow (\exists x \in E,\, \mathrm{non}(\mathrm{P}(x)))$
2. $\mathrm{non}(\exists x \in E,\, \mathrm{P}(x)) \Longleftrightarrow (\forall x \in E,\, \mathrm{non}(\mathrm{P}(x)))$
3. $\mathrm{non}\ (\mathrm{P} \Longrightarrow\ \mathrm{Q})\ \Longleftrightarrow\ (\mathrm{P}\ \text{et non}\ \mathrm{Q})$.

Exercice 8 *La négation de l'assertion*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R},\, \left(|x| < \alpha \Longrightarrow \left|\frac{x}{1+x^2}\right| < \varepsilon\right)$$

est

3.3 Permutation des quantificateurs

On peut toujours permuter les quantificateurs universels $\forall$ entre eux, et les quantificateurs existentiels $\forall$ entre eux.

Exercice 9 *1.* $(\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall y \in \mathbb{R}_-,\ x \geqslant y) \Longleftrightarrow (\ \forall y \in \mathbb{R}_-,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geqslant y)$.

2. $(\exists x \in \mathbb{R}_+,\ \exists y \in \mathbb{R}_-,\ x \geqslant y) \Longleftrightarrow (\ \exists y \in \mathbb{R}_-,\ \exists x \in \mathbb{R}_+,\ x \geqslant y)$.

Remarque 11 *La permutation d'un* $\forall$ *et d'un* $\exists$ *n'est pas aussi facile. Par exemple l'assertion* $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ z > x$ *est vraie, mais l'assertion* $\exists z \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ z > x$ *est fausse.*

4 Raisonnements

4.1 Raisonnement par déduction

Principe

1. Si **P est vraie** et **l'implication P$\Longrightarrow$Q est vraie**, alors **Q est vraie**.
2. Ainsi, pour montrer que Q est vraie, il suffit de montrer que l'implication P$\Longrightarrow$Q est vraie **sous l'hypothèse que** P soit vraie: **c'est le raisonnement par déduction**.
3. En pratique, un raisonnement par déduction contiendra des mots comme **donc** , **ainsi** , etc.

Remarque 12 ***Rédaction du raisonnement par déduction***

- *Au lieu de dire qu'on a montré que $P \Longrightarrow Q$ par déduction, on dit qu'on a montré l'implication* ***directement****.*
- *Pour démontrer directement une assertion du type $P \Longrightarrow Q$, on écrit :*
  On suppose qu'on a P et on montre que Q est vraie. ou
  Supposons qu'on a P et montrons qu'on a Q.

Exercice 10 *Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que : $(x+y)^2 \geqslant 4xy$.*

4.2 Raisonnement par contraposition

Définition 9

1. Q$\Longrightarrow$P est appelée **implication réciproque** de P$\Longrightarrow$Q.
2. non(Q)$\Longrightarrow$non(P) est appelée **contraposée** de l'implication P$\Longrightarrow$Q.

Proposition 4

Les implications **P$\Longrightarrow$Q** et **(non Q)$\Longrightarrow$(non P)** sont équivalentes. Autrement dit une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Principe

La démonstration par contraposition de P $\Longrightarrow$ Q consiste à montrer **directement** qu'on a (non P) $\Longrightarrow$ (non Q) : c'est le raisonnement par contraposition. Lors de la rédaction, on écrit : Raisonnons par contraposition. Supposons qu'on a (non Q) et montrons (non P).

Exercice 11 *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. *Démontrer :* $(a \neq -2 \text{ et } b \neq -2) \Longrightarrow ab + 2a + 2b \neq -4$.

4.3 Raisonnement par disjonction des cas

Principe

Le principe du raisonnement par **disjonction des cas** repose sur l'équivalence suivante :

$$Q \Longleftrightarrow ((P \Longrightarrow Q) et (\text{non}(P) \Longrightarrow Q)) .$$

Ainsi, pour montrer Q, on peut distinguer deux cas : on montre d'abord que $(P \Longrightarrow Q)$, puis on montre que $(\text{non}(P) \Longrightarrow Q)$.
Lors de la rédaction, on écrit :

- 1er cas : Supposons qu'on a Q et vérifions qu'on a P.
- 2ème cas : Supposons maintenant qu'on a non Q, et vérifions qu'on a P.

Exercice 12 *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que* $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

4.4 Raisonnement par l'absurde

Principe

La démonstration par l'absurde s'appuie sur l'assertion vraie suivante :
$((\neg \text{P} \Longrightarrow (\text{Q et } \neg \text{Q})) \Longrightarrow \text{P}$.
En pratique, ce raisonnement consiste, pour montrer qu'une assertion P est vraie, à montrer que **la négation de P** entraîne une certaine assertion Q mais aussi sa négation.
Pour cela on suppose que P est fausse, et on recherche une assertion Q (non connue à l'avance) telle qu'on ait à la fois Q et non Q; on aboutit donc à la contradiction (Q et non Q).
Lors de la rédaction, on écrit :
Raisonnons par absurde. Supposons qu'on a (non P).

Exercice 13 *Montrer que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

4.5 Raisonnement par récurrence

Théorème 1

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{P}(n)$ une assertion dépendante d'un entier $n \geqslant n_0$.
Si

1. **(Initialisation)** : $\mathrm{P}(n_0)$ est vraie
2. **(Hérédité)** :$\forall n \geqslant n_0,\ (\mathrm{P}(n) \Longrightarrow \mathrm{P}(n+1))$ est vraie

alors : $\forall n \geqslant n_0,\ \mathrm{P}(n)$ est vraie.

Rédaction

Exercice 14 *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geqslant n$.

Théorème 2

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{P}(n)$ une assertion dépendante d'un entier $n \geqslant n_0$.
Si

1. **(Initialisation)** : $\mathrm{P}(n_0)$ et $\mathrm{P}(n_0+1)$ sont vraies,
2. **(Hérédité)** $\forall n \geqslant n_0,\ ((\mathrm{P}(n) \text{ et } \mathrm{P}(n+1)) \Longrightarrow \mathrm{P}(n+2)$ est vraie

alors : $\forall n \geqslant n_0,\ \mathrm{P}(n)$ est vraie.

Rédaction

Exercice 15 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite réelle définie par*

$$u_0 = 4,\ u_1 = 5 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 3$.

4.6 Raisonnement par analyse-synthèse

Principe

On raisonne par **analyse-synthèse** lorsque l'on cherche la ou les solutions à un problème. Le principe est le suivant :

1. On suppose que l'on a une solution du problème et on cherche à en déduire toutes les propriétés possibles de cette solution afin de l'identifier au mieux **: c'est l'étape d'analyse**.
2. On détermine parmi tous les objets obtenus lors de l'analyse, ceux qui sont effectivement solutions du problème**: c'est l'étape de synthèse**.

De plus, si la phase d'analyse fournit une expression explicite de l'objet recherché, ne laissant pas le choix pour cet objet, cela fournit même l'unicité.

Exercice 16 *Montrer que toute fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*