

Chapitre 5 : Logique et Raisonnement

Partie II

1 Propositions logiques

1.1 Assertions

Définition 1

On appelle **assertion** toute phrase mathématique à laquelle on peut attribuer une et une seule **valeur de vérité**, à savoir **vrai** (V en abrégé) ou **faux** (F en abrégé).

Remarque 1 Parfois on note 1 (resp. 0) au lieu de V pour indiquer que l'assertion est vraie (resp. fausse).

Définition 2

Une assertion vraie est appelée **proposition**; on dit que qu'on a P, ou que P est vraie. Selon l'importance qu'on donne à la proposition, celle-ci pourra aussi porter le nom de : **théorème**, **corollaire**, **lemme**,..

Exemples 1 • (4 est un nombre positif) est une assertion vraie.

- (4 est un nombre négatif) est une assertion fausse.
- ($\sqrt{2}$) n'est pas une assertion car elle n'est même pas une phrase.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
($\sqrt{x} \geq 0$) est une assertion seulement si $x \geq 0$;
car si $x < 0$, $\sqrt{x}$ n'existe pas et ($\sqrt{x} \geq 0$) n'a donc pas de sens.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
($x + 1 > 0$) est une assertion vraie si $x > -1$, et est une assertion fausse si $x \leq -1$.

Remarque 2 Lorsque la valeur de vérité d'une assertion P dépend des valeurs prises par un paramètre x, on note souvent celle-ci $P(x)$ pour le signaler.

Exercice 1 1. $P(x) = x > 0$ est une assertion dépendant d'un paramètre x réel.

2. $P(2)$ est une assertion vraie.
3. $P(-2)$ est une assertion fausse.

1.2 Assertions équivalentes

Définition 3

Soient P et Q deux assertions.

On dit que P est **équivalente** à Q, ou que P et Q sont **équivalentes**, si P et Q ont la même valeur de vérité. On présente ce cas par la donnée de l'assertion $P \iff Q$.

Exemples 2 • x étant un réel positif. $(x = x^2 + 1)$ est équivalente à $(x^2 - x + 1 = 0)$.

• $(4 > 0)$ n'est pas équivalente à $(2 < 0)$.

Remarque 3 Table de vérité de l'équivalence

P	Q	$P \iff Q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Remarque 4 Pour exprimer que $P \iff Q$ est vraie, on peut utiliser l'une des expressions suivantes :

(1) $P \iff Q$.

(2) P équivaut à Q.

(3) P si et seulement si Q.

(4) Pour que P il faut et il suffit qu'on ait Q.

(5) P est une **condition nécessaire et suffisante** (CNS) pour qu'on ait Q.

1.3 Négation

Définition 4

On appelle **négation** d'une assertion P l'assertion, notée **non(P)** (ou par $\neg P$), définie comme étant vraie lorsque P est fausse et inversement.

On peut aussi dire que l'assertion non(P) est définie par la table de vérité :

P	non(P)

Exercice 2 1. La négation de $x \geq 0$ est

2. La négation de $x = y$ est

2 Connecteurs binaires usuels

Les connecteurs **binaires** opèrent eux sur deux assertions : ils permettent d'associer à deux assertions P et Q , de nouvelles assertions.

2.1 Conjonction et disjonction

Définition 5

Soient P et Q deux assertions.

1. On appelle **conjonction** de P et Q l'assertion notée **P et Q** définie comme étant vraie lorsque P et Q le sont toutes les deux.
2. On appelle **disjonction** de P et Q l'assertion notée **P ou Q** définie comme étant vraie lorsqu'au moins l'une des deux l'est).

On a donc :

P	Q	P et Q	P ou Q
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

Exercice 3 $0 < x < 1$ est la conjonction de

Remarque 5 Si **P ou Q** est vraie et **Q** est fausse alors nécessairement **P** est vraie.

2.2 Implications

Définition 6

Soient P et Q deux assertions.

On définit l'assertion $P \implies Q$, qu'on lit **P implique Q** , comme étant fausse dans le seul cas où P est vraie et Q est fausse. On a donc :

P	Q	$P \implies Q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

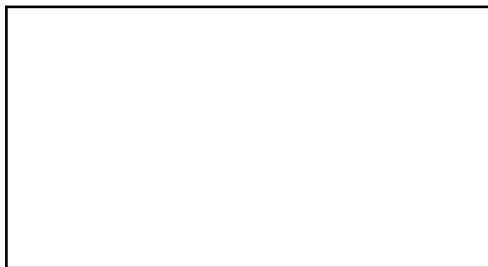
Remarque 6 1. Si P est fausse, alors $P \implies Q$ est toujours vraie.

2. Si P est vraie, alors $P \implies Q$ n'est vraie que lorsque Q est vraie.

3. Ainsi, pour montrer que $P \implies Q$ est vraie il suffit de montrer que Q est vraie dans le cas où P est vraie, ce qui revient à **supposer que P est vraie et de montrer sous cette hypothèse que Q est vraie.**

Rédaction

Quand on veut montrer que $P \implies Q$ est vraie, on procède souvent ainsi :



ou bien on procède par des implications successives :

$$P \implies P_1 \implies \dots \implies P_n \implies Q$$

Remarque 7 L'implication $P \implies Q$ peut s'exprimer par :

1. P implique Q .
2. P entraîne Q .
3. **Si** P , **alors** Q .
4. Q est **conséquence** de P .
5. Pour que P **il faut que** Q .

6. Q est une **condition nécessaire** (CN) pour P .
7. Pour que Q il **suffit** que P .
8. P est une **condition suffisante** (CS) pour Q .

Proposition 1

1. $P \implies Q$ et $(\text{non } P \text{ ou } Q)$ sont équivalentes.
2. $(P \iff Q)$ et $(P \implies Q \text{ et } Q \implies P)$ sont équivalentes.
3. $(P \iff Q)$ et $(\text{non}(P) \iff \text{non}(Q))$ sont équivalentes.

Preuve. 1

P	Q	$P \iff Q$	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$P \implies Q \text{ et } Q \implies P$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

P	Q	$P \iff Q$	$(\text{non}(P))$	$(\text{non}(Q))$	$(\text{non}(P) \iff \text{non}(Q))$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Remarque 8 Pour montrer que l'équivalence $P \iff Q$ est vraie, on a au moins trois méthodes :

1. Reasonner de P à Q au moyen d'un raisonnement dont chaque étape est une équivalence :

$$P \iff P_1 \iff \dots \iff P_n \iff Q$$

2. Montrer $P \implies Q$, puis $Q \implies P$.
3. Montrer que $P \implies Q$, puis $\text{non}(P) \implies \text{non}(Q)$

Proposition 2

1. $\text{non}(\text{non}(P)) \iff P$.
2. $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q))$.
3. $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q))$.
4. $\text{non}((P \implies Q)) \iff (P \text{ et } \text{non}(Q))$.

3 Quantificateurs

Soient E un ensemble et $P(x)$ une assertion dépendante d'un élément $x \in E$.

3.1 Définitions

Définition 7

- Le symbole ' $\forall$ ' est appelé **quantificateur universel**.
- On définit l'assertion $\forall x \in E, P(x)$ comme étant vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour tout x dans E .
Cette assertion se lit : **Pour tout x dans E on a $P(x)$** , ou **Quel que soit x dans E , on a $P(x)$** .

Exercice 4 1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

2. $\forall x \in [-1, 1], x^2 \leq 1$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 1$

Remarque 9 Écrire $\forall x, P(x)$ est insuffisant !

Définition 8

- On définit le **quantificateur existentiel** ' $\exists$ '.
- On définit l'assertion $\exists x \in E, P(x)$ comme étant vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un x dans E .
Cette assertion se lit : **Il existe (au moins un) x dans E tel que $P(x)$** .

Exercice 5 1. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$

2. $\exists x \in [2, 3], x^2 = 1$

Remarque 10 1. Quand on veut montrer: $\forall x \in E, P(x)$, on commence généralement la rédaction par



2. La lettre affectée par un quantificateur est muette ; elle peut être remplacée par n'importe quelle lettre :

$$(\forall x \in E, P(x)) \iff (\forall y \in E, P(y))$$

$$(\exists x \in E, P(x)) \iff (\exists y \in E, P(y))$$

Exercice 6 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 7 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, z > x$.

3.2 Négation

Proposition 3

1. $\text{non}(\forall x \in E, P(x)) \iff (\exists x \in E, \text{non}(P(x)))$
2. $\text{non}(\exists x \in E, P(x)) \iff (\forall x \in E, \text{non}(P(x)))$
3. $\text{non}(P \implies Q) \iff (P \text{ et non } Q)$.

Exercice 8 La négation de l'assertion

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, \left(|x| < \alpha \implies \left| \frac{x}{1+x^2} \right| < \varepsilon \right)$$

est

3.3 Permutation des quantificateurs

On peut toujours permuter les quantificateurs universels $\forall$ entre eux, et les quantificateurs existentiels $\exists$ entre eux.

Exercice 9 1. $(\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_-, x \geq y) \iff (\forall y \in \mathbb{R}_-, \forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq y)$.

2. $(\exists x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}_-, x \geq y) \iff (\exists y \in \mathbb{R}_-, \exists x \in \mathbb{R}_+, x \geq y)$.

Remarque 11 La permutation d'un $\forall$ et d'un $\exists$ n'est pas aussi facile. Par exemple l'assertion $\forall x \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, z > x$ est vraie, mais l'assertion $\exists z \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, z > x$ est fausse.

4 Raisonnements

4.1 Raisonnement par déduction

Principe

1. Si **P** est vraie et l'implication $P \implies Q$ est vraie, alors **Q** est vraie.
2. Ainsi, pour montrer que Q est vraie, il suffit de montrer que l'implication $P \implies Q$ est vraie sous l'hypothèse que P soit vraie: c'est le raisonnement par déduction.
3. En pratique, un raisonnement par déduction contiendra des mots comme **donc**, **ainsi**, etc.

Remarque 12 Rédaction du raisonnement par déduction

- Au lieu de dire qu'on a montré que $P \implies Q$ par déduction, on dit qu'on a montré l'implication **directement**.
- Pour démontrer directement une assertion du type $P \implies Q$, on écrit :
On suppose qu'on a P et on montre que Q est vraie. ou
Supposons qu'on a P et montrons qu'on a Q.

Exercice 10 Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que : $(x + y)^2 \geq 4xy$.

4.2 Raisonnement par contraposition

Définition 9

1. $Q \implies P$ est appelée **implication réciproque** de $P \implies Q$.
2. $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$ est appelée **contraposée** de l'implication $P \implies Q$.

Proposition 4

Les implications $P \implies Q$ et $(\text{non } Q) \implies (\text{non } P)$ sont équivalentes. Autrement dit une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Principe

La démonstration par contraposition de $P \implies Q$ consiste à montrer **directement** qu'on a $(\text{non } P) \implies (\text{non } Q)$: c'est le raisonnement par contraposition. Lors de la rédaction, on écrit : Raisonnons par contraposition. Supposons qu'on a $(\text{non } Q)$ et montrons $(\text{non } P)$.

Exercice 11 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer : $(a \neq -2 \text{ et } b \neq -2) \implies ab + 2a + 2b \neq -4$.

4.3 Raisonnement par disjonction des cas

Principe

Le principe du raisonnement par **disjonction des cas** repose sur l'équivalence suivante :

$$Q \iff ((P \implies Q) \text{ et } (\text{non}(P) \implies Q)).$$

Ainsi, pour montrer Q , on peut distinguer deux cas : on montre d'abord que $(P \implies Q)$, puis on montre que $(\text{non}(P) \implies Q)$.

Lors de la rédaction, on écrit :

- 1er cas : Supposons qu'on a Q et vérifions qu'on a P .
- 2ème cas : Supposons maintenant qu'on a non Q , et vérifions qu'on a P .

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

4.4 Raisonnement par l'absurde

Principe

La démonstration par l'absurde s'appuie sur l'assertion vraie suivante :

$$((\neg P \implies (Q \text{ et } \neg Q)) \implies P.$$

En pratique, ce raisonnement consiste, pour montrer qu'une assertion P est vraie, à montrer que **la négation de P** entraîne une certaine assertion Q mais aussi sa négation.

Pour cela on suppose que P est fausse, et on recherche une assertion Q (non connue à l'avance) telle qu'on ait à la fois Q et non Q ; on aboutit donc à la contradiction (Q et non Q).

Lors de la rédaction, on écrit :

Raisonnons par absurde. Supposons qu'on a $(\text{non } P)$.

Exercice 13 Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

4.5 Raisonnement par récurrence

Théorème 1

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une assertion dépendante d'un entier $n \geq n_0$.

Si

1. **(Initialisation)** : $P(n_0)$ est vraie
2. **(Hérédité)** : $\forall n \geq n_0, (P(n) \implies P(n+1))$ est vraie

alors : $\forall n \geq n_0, P(n)$ est vraie.

Rédaction

Exercice 14 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n$.

Théorème 2

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une assertion dépendante d'un entier $n \geq n_0$.

Si

1. **(Initialisation)** : $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$ sont vraies,
2. **(Hérédité)** $\forall n \geq n_0, ((P(n) \text{ et } P(n + 1)) \implies P(n + 2))$ est vraie

alors : $\forall n \geq n_0, P(n)$ est vraie.

Rédaction

Exercice 15 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 4, u_1 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3$.

4.6 Raisonnement par analyse-synthèse

Principe

On raisonne par **analyse-synthèse** lorsque l'on cherche la ou les solutions à un problème. Le principe est le suivant :

1. On suppose que l'on a une solution du problème et on cherche à en déduire toutes les propriétés possibles de cette solution afin de l'identifier au mieux : **c'est l'étape d'analyse.**
2. On détermine parmi tous les objets obtenus lors de l'analyse, ceux qui sont effectivement solutions du problème: **c'est l'étape de synthèse.**

De plus, si la phase d'analyse fournit une expression explicite de l'objet recherché, ne laissant pas le choix pour cet objet, cela fournit même l'unicité.

Exercice 16 *Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*