Chapitre 0 : Rappels Calculatoires

1 L'ordre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Définition 1

Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}$, on dit que :

- x est inférieur ou égal à y, ou y est supérieur ou égal à x, et on note $x \leq y$ ou $y \geq x$ si $y - x$ est positif ou nul.
- x est inférieur strictement à y, ou y est supérieur strictement à x, et on note $x < y$ ou $y > x$, si $y - x$ est strictement positif.

Exercice 1 *Comparer* $\dfrac{3}{4}$ *et* $\dfrac{10}{13}$.

Propriétés 1

Les relations d'ordre $\leq$ et $\geq$ sur $\mathbb{R}$ vérifient les propriétés suivantes : Pour tous x, y et $z \in \mathbb{R}$

- **Transitivité:**
  Si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.
- **Compatibilité avec l'addition** :
  Si $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$.
- **Compatibilité avec la multiplication** :
  Si $z \geq 0$ et $x \leq y$, alors $xz \leq yz$.
  Si $z \leq 0$ et $x \leq y$, alors $xz \geq yz$.

Remarque 1 *Les relations d'ordre sont également compatibles avec la soustraction et la division par un nombre* ***strictement positif***.

Exercice 2 *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $7x - 1 \leq 3x - 7$.

Remarque 2 *Soient* x_1, x_2, y_1 *et* $y_2 \in \mathbb{R}$.

1. *Si* $x_1 \leq y_1$ *et* $x_2 \leq y_2$, *alors* $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$.
2. *Si* $0 \leq x_1 \leq y_1$ *et* $0 \leq x_2 \leq y_2$ *alors* $0 \leq x_1x_2 \leq y_1y_2$.

Notation. Si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $a^0 = 1$ et pour tout $n > 0$ $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$, et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

On a alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tous $m, n \in \mathbb{Z}$:

Propriétés 2

- $(xy)^n = x^n y^n$
- $x^{n+m} = x^n x^m$
- $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

Remarque 3 *Pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.*

Application. Montrer que pour tous réels a, b, $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Exercice 3 *Soient $a, b > 0$. Comparer $1 - \frac{a}{b}$ et $\dfrac{b}{a} - 1$.*

Remarque 4 *Si $0 \leq x \leq y$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $0 \leq x^n \leq y^n$.*

Notation. Pour tout $a \geq 0$, il existe un unique $b_a \geq 0$ tel que $b_a^2 = a$. On note $\sqrt{a} := b_a$ ou $a^{\frac{1}{2}} = b_a$. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et tout $a \geq 0$, il existe un unique $b_a \geq 0$ tel que $b_a^n = a$ et on note $\sqrt[n]{a} = b_a$ ou $a^{\frac{1}{n}} = b_a$.

Remarque 5 *Les résultats dans Propriétés 2 restent vraies pour $x, y \geq 0$ et pour des puissances $r, s \in \mathbb{Q} - \{0\}$.*

Méthode 1 *Comparer deux réels **positifs** revient tout simplement à comparer leurs carrées.*

Exercice 4 *Comparer $\sqrt{5} + \sqrt{13}$ et $\sqrt{34}$.*

Définition 2

Si a et b sont deux réels tels que $a \leq b$, on appelle le segment $[a, b]$ l'ensemble des réels compris entre a et b.

Exemples 1 *Si $a \in \mathbb{R}$, $\{a\} = [a, a]$.*

Définition 3

Un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est dit un intervalle de $\mathbb{R}$ si pour tous x, y de I tels que $x \leq y$ on a $[x, y] \subseteq I$.

Propriétés 3

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les sous-ensembles suivants :

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}, \text{ pour } a \leq b$$

$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}, \text{ pour } a \leq b$$

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}, \text{ pour } a \leq b$$

$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}, \text{ pour } a \leq b$$

$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}, \text{ pour } a \in \mathbb{R}$$

$$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}, \text{ pour } a \in \mathbb{R}$$

$$]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}, \text{ pour } b \in \mathbb{R}$$

$$]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}, \text{ pour } b \in \mathbb{R}$$

Exercice 5 *Soient* $x, y \in [1,2]$. *Encadrer* $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

Définition 4

On appelle **valeur absolue** d'un réel x, et qu'on note $|x|$, la valeur

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Remarque 6 *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

- $|x| \geq 0$.
- $|x| \geq x$ *et* $|x| \geq -x$.

Exemples 2 $|-1| = 1$ *et* $|3.4| = 3.4$.

Remarque 7 *D'abord, on a* $|x| \geq 0$, *et si* $x, y \in \mathbb{R}$, *on définit*

$$\max(x,y) = \begin{cases} x & si \quad x \geq y \\ y & si \quad x \leq y \end{cases}$$

alors $|x| = \max(x,-x)$.

Question Que désigne graphiquement la valeur $|x-y|$ sur la droite réelle ?

Méthode 2 *Pour démontrer que* $|x| \leq y$, *où* x *et* y *sont réels, il suffit de montrer que* $x \leq y$ *et que* $-x \leq y$.

Proposition 1: Inégalités triangulaires

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

- **Inégalité triangulaire** :
$$|x+y| \leq |x| + |y|$$
avec égalité si, et seulement s'il existe un réel positif λ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.
- **Inégalité triangulaire renversée** :
$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Proposition 2

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$

- $\sqrt{a^2} = |a|$.
- $|a| = |b| \iff a^2 = b^2$.

Exercice 6 *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation* $|4 - x| = x$.

Exercice 7 *Résoudre graphiquement l'inéquation* $|x - 1| \leq 2$.

Propriétés 4

Pour tous réels x et $y \geq 0$,
$$|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$$

Exercice 8 *Refaire l'exercice 7 avec calcul.*

2 Résolution des équations sur $\mathbb{R}$

2.1 Équations de la forme $ax + b = 0$

Considérons sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$ax + b = 0 \tag{1}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. On note par S l'ensemble de solutions réels de (1).
On distingue les cas suivantes :

- **1er cas :** Si $a = 0$.
  - Si $b = 0$, alors $S = \mathbb{R}$.
  - Si $b \neq 0$, alors $S = \varnothing$.
- **2ème cas :** Si $a \neq 0$.
  Alors, $S = \left\{ \dfrac{-b}{a} \right\}$.

2.2 Équations du deuxième degré

On s'intéresse maintenant aux équations du deuxième degré, i.e. les équations de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
On commence par calculer la valeur $\Delta = b^2 - 4ac$, qu'on appelle **le discriminant du** trinôme $aX^2 + bX + c$. Trois cas se présentent :

- **1er cas:** Si $\Delta > 0$:
  On écrit alors $\Delta = \delta^2$, avec $\delta \in \mathbb{R}$. Alors l'équation (2) admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

  On a alors $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ et

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

  Donc on a le tableau de signes suivant (en supposant par exemple que $x_1 \leq x_2$):

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe opposé de a	0	signe de a	

- **2ème cas:** Si $\Delta = 0$:
  L'équation en question alors admet une seule solution sur $\mathbb{R}$, à savoir $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ et

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

  On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

- **3ème cas :** $\Delta < 0$: L'équation alors n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ et le signe de $ax^2 + bx + c$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de a .

Méthode 3 *Le signe d'un trinôme peut être déterminé en étudiant ses racines, en calculant son discriminant.*

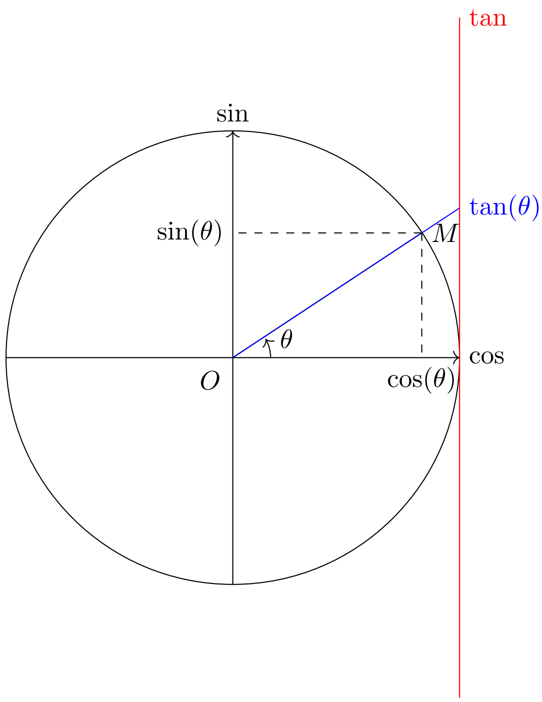
Exercice 9 *Déterminer le signe de $x^2 + x - 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 10 *Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On note $3 = x + y$ et $2 = xy$. Donner une équation sur $\mathbb{R}$ du deuxième degré dont les solutions réelles sont x et y.*

Méthode 4 *Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ est un trinôme, où $a \neq 0$ dont on remarque x_1 une solution de $P(x) = 0$, alors une deuxième solution de $P(x) = 0$ est donnée par $x_2 = \frac{c}{ax_1}$.*

Exercice 11 *Donner, sans calculer le discriminant, les solutions de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.*

3 Calcul Trignomoétrique



La fonction qui à chaque $\theta \in \mathbb{R}$ fait associer l'abscisse (resp. la coordonnée) du point M, est appellée **cosinus** et notée cos (resp. appellée **sinus** et notée sin) .

La fonction **tangente**, notée *tan*, est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ par $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Proposition 3

La fonction cos (resp. sin) est strictement décroissante (resp. strictement croissante) sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Proposition 4

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors,

- $\cos(x) = \cos(y) \iff x = y + 2k\pi$ ou $x = -y + 2l\pi$, avec $k, l \in \mathbb{Z}$.
- $\sin(x) = \sin(y) \iff x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2l\pi$, avec $k, l \in \mathbb{Z}$.
- Si $x, y \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, alors

$$\tan(x) = \tan(y) \iff x = y + k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Remarque 8 *Si $x, y \in \mathbb{R}$, pour exprimer le fait que $x = y + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on note $x \equiv y[2\pi]$.*

Corollaire 1

Si $x \in \mathbb{R}$, alors :

1. La fonction cos :
   - $\cos(x) = -1 \iff x \equiv \pi[2\pi]$.
   - $\cos(x) = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.
   - $\cos(x) = 1 \iff x \equiv 0[2\pi]$.
2. La fonction sin :
   - $\sin(x) = -1 \iff x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
   - $\sin(x) = 0 \iff x \equiv 0[\pi]$.
   - $\sin(x) = 1 \iff x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Exercice 12 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes:*

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(3x - \pi) = -\frac{1}{2}$$

Propriétés 5

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

y	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
$\cos(y)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(y)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$

Proposition 5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Propriétés 6

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, alors :

- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.
- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$.
- Si tout est bien définie, alors $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$
- $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$.
- $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$.
- Si tout est bien définie, alors $\tan(x-y) = \dfrac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$

Corollaire 2

Si $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2\cos^2(x) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(x) \end{aligned}$$

et $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Corollaire 3

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, alors

- $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$.
- $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$.
- $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$.

Exercice 13

1. *Rappeler la valeur de* $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
2. *Calculer alors* $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
3. *En déduire la valeur de* $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.