

# Chapitre 0 : Rappels Calculatoires

## 1 L'ordre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

### Définition 1

Étant donnés  $x, y \in \mathbb{R}$ , on dit que :

- $x$  est inférieur ou égal à  $y$ , ou  $y$  est supérieur ou égal à  $x$ , et on note  $x \leq y$  ou  $y \geq x$  si  $y - x$  est un réel positif ou nul.
- $x$  est inférieur strictement à  $y$ , ou  $y$  est supérieur strictement à  $x$ , et on note  $x < y$  ou  $y > x$ , si  $y - x$  est un réel strictement positif.

**Exercice 1** Comparer  $\frac{3}{4}$  et  $\frac{10}{13}$ .

### Propriétés 1

Les relations d'ordre  $\leq$  et  $\geq$  sur  $\mathbb{R}$  vérifient les propriétés suivantes :

- **Transitivité:**  
Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , si  $x \leq y$  et  $y \leq z$ , alors  $x \leq z$ .
- **Compatibilité avec l'addition :**  
Pour tous  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , si  $x \leq y$ , alors  $x + z \leq y + z$ .
- **Compatibilité avec la multiplication :**  
Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $z \geq 0$ , si  $x \leq y$ , alors  $xz \leq yz$ .  
Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $z \leq 0$ , si  $x \leq y$ , alors  $xz \geq yz$ .

**Remarque 1** Les relations d'ordre sont également compatibles avec la soustraction et la division par un nombre **strictement positif**.

**Exercice 2** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $7x - 1 \leq 3x - 7$ .

**Exercice 3** Soient  $x_1, x_2, y_1$  et  $y_2 \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que si  $x_1 \leq y_1$  et  $x_2 \leq y_2$ , alors  $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$ .
2. Montrer que si  $0 \leq x_1 \leq y_1$  et  $0 \leq x_2 \leq y_2$  alors  $0 \leq x_1 x_2 \leq y_1 y_2$ .

**Notation.** Si  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a^0 = 1$  et pour tout  $n > 0$   $a^n = \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ , et  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

On a alors pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  et tous  $m, n \in \mathbb{Z}$  :

### Propriétés 2

- $(xy)^n = x^n y^n$
- $x^{n+m} = x^n x^m$
- $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

**Remarque 2** Pour tout  $x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ .

**Application.** Montrer que pour tous réels  $a, b, a^2 + b^2 \geq 2ab$ .

**Exercice 4** Soient  $a, b > 0$ . Comparer  $1 - \frac{a}{b}$  et  $\frac{b}{a} - 1$ .

**Notation.** Pour tout  $a \geq 0$ , il existe un unique  $b_a \geq 0$  tel que  $b_a^2 = a$ . On note  $\sqrt{a} := b_a$  ou  $a^{\frac{1}{2}} = b_a$ . Plus généralement, pour tout  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$  et tout  $a \geq 0$ , il existe un unique  $b_a \geq 0$  tel que  $b_a^n = a$  et on note  $\sqrt[n]{a} = b_a$  ou  $a^{\frac{1}{n}} = b_a$ .

**Remarque 3** Les résultats dans Propriétés 2 restent vraies pour  $x, y \geq 0$  et pour des puissances  $r, s \in \mathbb{Q} - \{0\}$ .

**Méthode 1** Comparer deux réels **positifs** revient tout simplement à comparer leurs carrés.

**Exercice 5** Comparer  $\sqrt{5} + \sqrt{13}$  et  $\sqrt{34}$ .

### Définition 2

Si  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $a \leq b$ , on appelle le segment  $[a, b]$  l'ensemble des réels compris entre  $a$  et  $b$ .

**Exemples 1** Si  $a \in \mathbb{R}, \{a\} = [a, a]$ .

### Définition 3

Un sous-ensemble  $I$  de  $\mathbb{R}$  est dit un intervalle de  $\mathbb{R}$  si pour tous  $x, y$  de  $I$  tels que  $x \leq y$  on a  $[x, y] \subseteq I$ .

### Propriétés 3

Les intervalles de  $\mathbb{R}$  sont exactement les sous-ensembles suivants :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}, \text{ pour } a \leq b$$

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}, \text{ pour } a \leq b$$

$$[a, b[ = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}, \text{ pour } a \leq b$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}, \text{ pour } a \leq b$$

$$[a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}, \text{ pour } a \in \mathbb{R}$$

$$]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R}, a < x\}, \text{ pour } a \in \mathbb{R}$$

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}, \text{ pour } b \in \mathbb{R}$$

$$]-\infty, b[ = \{x \in \mathbb{R}, x < b\}, \text{ pour } b \in \mathbb{R}$$

**Exercice 6** Soient  $x, y \in [1, 2]$ . Encadrer  $\frac{x-y}{x+y}$ .

### Définition 4

On appelle **valeur absolue** d'un réel  $x$ , et qu'on note  $|x|$ , la valeur

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

**Remarque 4** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

- $|x| \geq 0$ .
- $|x| \geq x$  et  $|x| \geq -x$ .

**Exemples 2**  $|-1| = 1$  et  $|3.4| = 3.4$ .

**Remarque 5** D'abord, on a  $|x| \geq 0$ , et si  $x, y \in \mathbb{R}$ , on définit

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ y & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

alors  $|x| = \max(x, -x)$ .

**Question** Que désigne graphiquement la valeur  $|x - y|$  sur la droite réelle ?

**Exercice 7** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $|4 - x| = x$ .

**Exercice 8** Résoudre graphiquement l'inéquation  $|x - 1| \leq 2$ .

#### Propriétés 4

Si  $x, a \in \mathbb{R}$ , alors

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

**Exercice 9** Refaire l'exercice 8 avec calcul.

## 2 Résolution des équations sur $\mathbb{R}$

### 2.1 Équations de la forme $ax + b = 0$

Considérons sur  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :

$$ax + b = 0 \tag{1}$$

où  $a, b \in \mathbb{R}$ . On note par  $S$  l'ensemble de solutions réels de (1).

On distingue les cas suivantes :

- **1er cas** : Si  $a = 0$ .
  - Si  $b = 0$ , alors  $S = \mathbb{R}$ .
  - Si  $b \neq 0$ , alors  $S = \emptyset$ .

- **2ème cas** : Si  $a \neq 0$ .

Alors,  $S = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$ .

### 2.2 Équations du deuxième degré

On s'intéresse maintenant aux équations du deuxième degré, i.e. les équations de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

où  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$ .

On commence par calculer la valeur  $\Delta = b^2 - 4ac$ , qu'on appelle le **discriminant** du trinôme  $aX^2 + bX + c$ . Trois cas se présentent :

- **1er cas:** Si  $\Delta > 0$ :

Alors l'équation (2) admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

On a alors  $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$  et  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$  et

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Donc on a le tableau de signes suivant (en supposant par exemple que  $x_1 \leq x_2$ ):

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de $a$	0	signe de $-a$	signe de $a$

- **2ème cas:** Si  $\Delta = 0$  :

L'équation en question alors admet une seule solution sur  $\mathbb{R}$ , à savoir  $x_0 = \frac{-b}{2a}$  et

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

On a le tableau de signes suivant :

$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de $a$	0	signe de $a$

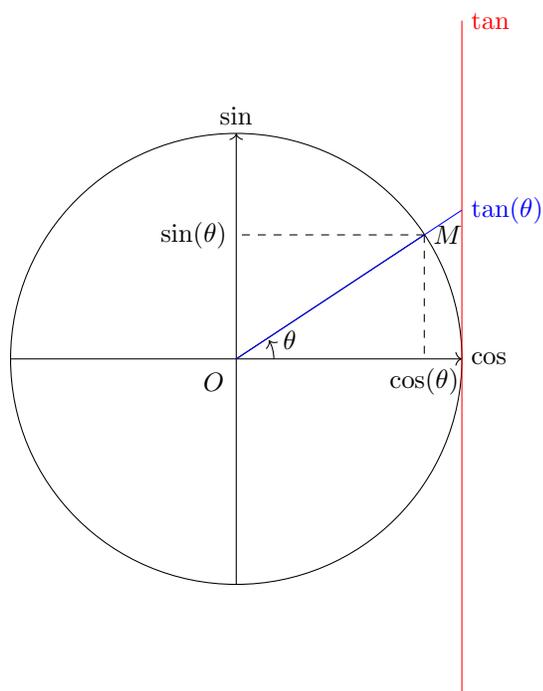
- **3ème cas :**  $\Delta < 0$ : L'équation alors n'admet pas de solutions sur  $\mathbb{R}$  et le signe de  $ax^2 + bx + c$  sur  $\mathbb{R}$  est le signe de  $a$  .

**Méthode 2** Le signe d'un trinôme peut être déterminé en étudiant ses racines, en calculant son discriminant.

**Exercice 10** Déterminer le signe de  $x^2 + x - 2$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 11** Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . On note  $b = x + y$  et  $c = xy$ . Donner une équation sur  $\mathbb{R}$  du deuxième degré dont les solutions réelles sont  $x$  et  $y$ .

### 3 Cercle Trigonométrique



La fonction qui à chaque  $\theta \in \mathbb{R}$  fait associer l'abscisse (resp. la coordonnée) du point  $M$ , est appelée **cosinus** et notée  $\cos$  (resp. appelée **sinus** et notée  $\sin$ ).

On appelle fonction **tangente** et on note  $\tan$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  par

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

#### Proposition 1: L

fonction  $\cos$  (resp.  $\sin$ ) est strictement décroissante (resp. strictement croissante) sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

### Proposition 2

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . Alors,

- $\cos(x) = \cos(y) \iff x = y + 2k\pi$  ou  $x = -y + 2l\pi$ , avec  $k, l \in \mathbb{Z}$ .
- $\sin(x) = \sin(y) \iff x = y + 2k\pi$  ou  $x = \pi - y + 2l\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Si  $x, y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ , alors

$$\tan(x) = \tan(y) \iff x = y + k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

**Remarque 6** Si  $x, y \in \mathbb{R}$ , pour exprimer le fait que  $x = y + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ , on note  $x \equiv y[2\pi]$ .

### Corollaire 1

Si  $x \in \mathbb{R}$ , alors :

1. La fonction cos :

- $\cos(x) = -1 \iff x \equiv \pi[2\pi]$ .
- $\cos(x) = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ .
- $\cos(x) = 1 \iff x \equiv 0[2\pi]$ .

2. La fonction sin :

- $\sin(x) = -1 \iff x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ .
- $\sin(x) = 0 \iff x \equiv 0[\pi]$ .
- $\sin(x) = 1 \iff x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .

**Exercice 12** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les deux équations suivantes:

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(3x - 1) = -\frac{1}{2}$$

### Propriétés 5

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , alors

$y$	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
$\cos(y)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(y)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$

### Proposition 3

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ .

### Propriétés 6

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ , alors :

- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ .
- $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$ .
- Si  $x, y, x + y \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ , alors  $\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$
- $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$ .
- $\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$ .
- Si  $x, y, x - y \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ , alors  $\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$

### Corollaire 2

Si  $x \in \mathbb{R}$ , alors

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2\cos^2(x) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(x) \end{aligned}$$

et  $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ .

### Corollaire 3

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ , alors

- $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$ .
- $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$ .
- $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))$ .

**Exercice 13** 1. Rappeler la valeur de  $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

2. Calculer alors  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .

3. En déduire la valeur de  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .

## 4 Calcul de limites

### 4.1 Propriétés

#### Propriétés 7

Soient  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ,  $l, l' \in \mathbb{R}$  et  $f, g$  deux fonctions; on a les tableaux suivants :

- la somme :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

- le produit :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$	$ll'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

**Remarque 7** Les mêmes règles de calculs de limites s'appliquent sur la soustraction et la division, en utilisant le fait que

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0^\pm \text{ et } \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty$$

**Exercice 14** Calculer la limite en 1 et en  $+\infty$  de  $f : x \rightarrow \frac{x^2 + 1}{1 - x}$ .

#### Théorème 1

Soient  $a, b$  et  $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = l$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = l$

**Exercice 15** Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 - x}$ .

#### Théorème 2: La limite par encadrement (ou des gendarmes)

Soient  $f, g, h$  des fonctions définies sur  $I$  un intervalle ouvert à valeurs réelles et  $a \in I$  tels que :

$$\forall x \in I, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = h(x) = l \in \mathbb{R}$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

**Remarque 8** Avec les mêmes données du théorème précédent

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ .

**Exercice 16** Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ .

## 4.2 Limites usuelles

### Propriétés 8

#### 1. Fonctions circulaires :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$ .

#### 2. Fonctions ln et exp :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

#### 3. Croissances Comparées : Si $a \in ]0, +\infty[$ , alors

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln(x) = 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a}{e^x} = 0$ .

## 5 Calcul de dérivées et primitives

$f(x)$	Ensemble de définition	Intervalle(s) de dérivabilité	$f'(x)$
$Cte$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$ax + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a$
$x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
$x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$nx^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^{*-}$ et $\mathbb{R}^{*+}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^{*-}$ et $\mathbb{R}^{*+}$	$-nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{*+}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{ax + b}{cx + d}$	$\mathbb{R} - \{-c/d\}$	$\mathbb{R} - \{-c/d\}$	$\frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{*+}$	$\mathbb{R}^{*+}$	$\frac{1}{x}$
$e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$e^x$

### Théorème 3

Soient  $f, g$  deux fonctions réelles définies et dérivables sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors

- la fonction  $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ , on a  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ .
  - la fonction  $\lambda.f : x \mapsto \lambda f(x)$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ , on a  $(\lambda.f)'(x) = \lambda f'(x)$ .
  - la fonction  $(fg) : x \mapsto f(x)g(x)$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ ,  $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ .
  - Si de plus  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors la fonction  $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ ,  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ .
- En particulier,  $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$ .

**Exercice 17** Calculer la dérivée de la fonction  $x \mapsto \frac{2x - 1}{5x^2 + 3}$ .

### Théorème 4

Si  $f$  est une fonction réelle définie et dérivable sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans un intervalle  $J$ , et  $g$  est une fonction réelle définie et dérivable sur  $J$ , alors la fonction composée  $(g \circ f) : x \mapsto g(f(x))$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ , on a

$$(g \circ f)'(x) = f'(x).g'(f(x))$$

**Exercice 18** Déterminer les dérivées des fonctions composées,  $f^2$ ,  $\sqrt{f}$ ,  $\exp(f)$  et  $\ln(f)$ .

### Définition 5

Soient  $f$  et  $F$  deux fonctions réelles définies sur un intervalle  $I$ .

On dit que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  si  $F$  est dérivable sur  $I$  telle que  $F'(x) = f(x)$ , pour tout  $x \in I$ .

### Théorème 5

Si  $f$  est une fonction réelle définie et continue sur un intervalle  $I$ , alors  $f$  admet des primitives sur  $I$ . De plus, si  $F$  et  $G$  sont deux primitives de  $f$  sur  $I$ , alors il existe  $c \in \mathbb{R}$ , tel que pour tout  $x \in I$

$$G(x) = F(x) + c$$

**Commentaire 1** Pour déterminer toutes les primitives d'une fonction continue, il suffit d'en donner une.

**Exercice 19** Donner des primitives des fonctions suivantes :

- $x \mapsto 1$
- $x \mapsto x$
- $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  sur  $]0, +\infty[$ .

### Définition 6: Intégrale d'une fonction

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et soit  $F$  une primitive **quelconque** de  $f$  sur  $[a, b]$ . Alors la valeur  $F(b) - F(a)$  est **indépendante** du choix d'une primitive de  $f$ , i.e. si  $G$  est une autre primitive de  $f$ , alors  $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$ . On note alors

$$\int_a^b f(x)dx := F(b) - F(a)$$

et c'est appelée **l'intégrale** de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$ .

**Notation 1** On note aussi  $[F(x)]_{x=a}^{x=b} := F(b) - F(a)$ , ou tout simplement par  $[F(x)]_a^b$ .

**Exercice 20** Calculer l'intégrale des  $f$  dans chacune des cas suivantes :

1.  $f(x) = 1$  sur  $[0, 1]$ .
2.  $f(x) = 2x$  sur  $[-1, 1]$ .
3.  $f(x) = \cos(x)$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

### Théorème 6

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors, pour tout  $a \in I$ , la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

### Proposition 4: Intégration par parties

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur  $[a, b]$ . Alors

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

**Commentaire 2** On peut utiliser le résultat suivant pour chercher aussi des primitives des fonctions. Prenons la fonction  $\ln$  comme exemple.

## 6 Sommes et produits

### Définition 7

- Si  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_1, \dots, a_n$  sont des nombres réels, on note

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \dots + a_n$$

- Plus généralement si  $p \leq n$  sont deux nombres naturels alors, on note

$$\sum_{k=p}^n a_k = a_p + \dots + a_n$$

**Exemples 3**  $\sum_{k=1}^n a = na$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 21** Calculer

$$\sum_{k=0}^5 k(k+1)$$

### Propriétés 9

- Si  $a_p, \dots, a_{n+p+1}$  sont des réels, où  $p$  et  $n$  sont des entiers naturels, alors

$$\sum_{k=p}^{n+p} a_{k+1} - a_k = a_{n+p+1} - a_p$$

- $\sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=p}^n a_{n-k+p}$

**Exercice 22** Montrer que  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .

### Définition 8

- Si  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_1, \dots, a_n$  sont des nombres réels, on note

$$\prod_{k=0}^n a_k = a_0 + \dots + a_n$$

- Plus généralement si  $p \leq n$  sont deux nombres naturels alors, on note

$$\prod_{k=p}^n a_k = a_p + \dots + a_n$$

**Exemples 4**  $\prod_{k=1}^n a = a^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $a \in \mathbb{R}$ .

### Proposition 5

Soit  $q$  un réel et  $p \leq n$  deux entiers naturels. On a :

$$\sum_{k=p}^n q^k = \begin{cases} n-p+1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice 23** Calculer  $\sum_{k=1}^n 2^k$ , pour  $n \geq 1$ .

### Définition 9

On définit pour tout  $n \in \mathbb{N}$  sa factorielle, qu'on note par  $n!$  par

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

**Exercice 24** Calculer  $7!$ .

**Exercice 25** Calculer  $\frac{5!}{(3!)(2!)}$ .

### Propriétés 10

Si  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors

$$a^n - b^n = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

**Exercice 26** Factoriser  $a^3 - b^3$  et  $a^5 - b^5$ .