Chapitre 8 : Systèmes d'équations Linéaires

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

Définition 1

- On appelle **système linéaire** de n équations à p inconnues $x_1, \dots, x_p$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout système de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

  où les coefficients $a_{i,j}$ et b_i sont des éléments fixés de $\mathbb{K}$ pour tous $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$.
- Le n-uplet $(b_1, \dots, b_n)$ est appelé **second membre du système** (S).
- On appelle **solution** de (S) tout p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les n équations de (S).
- **Résoudre** le système (S) revient à déterminer toutes ses solutions.
- On dit que le système (S) est **compatible** s'il admet au moins une solution. Sinon, on dit que le système est **incompatible**.
- On dit qu'un système est **homogène** ou **sans second membre** si $b_1 = \dots = b_n = 0$.
- On appelle **système homogène associé à** (S), le système noté (S_H) obtenu en remplaçant le second membre du système (S) par un second membre nul.

Exemples 1

- *Système linéaire de deux équations à trois inconnues :*

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y + z = -2 \\ x + 2y - z = 3 \end{array}\right.$$

On remarque que le triplet $(1, 2, 2)$ *est solution de ce système. Ce système est alors compatible.*

- *Système homogène de trois équations à quatre inconnues :*

$$\begin{cases} 2x - 3y + z + t = 0 \\ x + 2y - z - 3t = 0 \\ -x - y + 2t = 0 \end{cases}$$

  On remarque que le quadruplet $(0,0,0,0)$ *est solution. Ce système est alors compatible.*

- *Système de deux équations à deux inconnues :*

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

  Ce système est incompatible.

- *Le système* $\begin{cases} x^2 - y = 2 \\ -y^2 + \ln x = x \end{cases}$ *n'est pas linéaire.*

Remarque 1 *Tout système homogène est compatible : le p-uplet* $(0,\ldots,0)$ *est toujours solution d'un tel système.*

2 Systèmes échelonnés

2.1 Définitions

Définition 2

On dit qu'un système linéaire d'inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ est **échelonné** si :

- lorsque les coefficients de $x_1, \ldots, x_k$ sont nuls sur une ligne, alors les coefficients de $x_1, \ldots, x_{k+1}$ sont nuls sur la ligne suivante,
- lorsque le membre de gauche d'une ligne est nul, alors il en va de même pour toutes les lignes suivantes.

Autrement dit, un système échelonné est de la forme :

$$(SE)\left\{\begin{array}{ccccccc}
\underbrace{a_{1,1}}_{\neq 0}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + & a_{1,j_2}x_{j_2} + a_{1,j_2+1}x_{j_2+1} + & \cdots & +a_{1,j_r}x_{j_r} + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\
 & \underbrace{a_{2,j_2}}_{\neq 0}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + & \cdots & +a_{2,j_r}x_{j_r} + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\
 & & \ddots & & \vdots & \\
 & & & \ddots & \vdots & \\
 & & & \underbrace{a_{r,j_r}}_{\neq 0}x_{j_r} + \cdots + a_{r,p}x_p & = & b_r \\
 & & & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & \vdots & \\
 & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

où les coefficients $a_{1,1}, a_{1,j_2}, \ldots, a_{r,j_r}$ sont tous non nuls. Ces coefficients sont appelés les **pivots** de (SE).

- Une équation qui contient un pivot est appelée **équation principale**.
- Une équation qui ne contient aucun pivot est appelée **équation auxiliaire**.
- Une inconnue dont l'un des coefficients est un pivot est appelée **inconnue principale**.
- Une inconnue dont aucun des coefficients n'est un pivot est appelée **inconnue auxiliaire** ou **paramètre**.
- Le nombre de pivots est appelé le **rang** du système.

Exemples 2 *On considère le système linéaire suivant d'inconnues* x, y, z, t, w *:*

$$(S)\left\{\begin{aligned} x-y+3z+t-2w &= 5 \\ z-t+w &= 2 \\ t+3w &= 3 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 9 \end{aligned}\right.$$

Exemples 3 *On considère le système linéaire suivant d'inconnues* x, y, z *:*

$$(S)\left\{\begin{aligned} 2x+y+z &= 3 \\ y+z &= 1 \\ -3z &= 6 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Exemples 4 *On considère le système linéaire suivant d'inconnues* x, y, z *:*

$$\left\{\begin{aligned} -4x+3y-z &= 2 \\ -13y-9z &= -10 \\ 7y+5z &= 4 \end{aligned}\right.$$

2.2 Résolution d'un système échelonné

Exemples 5 *Résoudre le système échelonné suivant*

$$(S)\left\{\begin{aligned} x-y+3z+t-2w &= 5\\ z-t+w &= 2\\ t+3w &= 3\\ 0 &= 0\\ 0 &= 9 \end{aligned}\right.$$

Exemples 6 *Résoudre le système échelonné suivant :*

$$(S)\left\{\begin{aligned} 2x+y+z &= 3\\ y+z &= 1\\ -3z &= 6\\ 0 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Exemples 7 *Résoudre le système échelonné suivant :*

$$(S)\left\{\begin{array}{rl} x-y+z+t-2w & =5 \\ z-t+w & =2 \\ t+3w & =3 \\ 0 & =0 \end{array}\right.$$

Théorème 1: (Résolution d'un système échelonné)

Soit (SE) un système échelonné.

(i) Si (SE) comporte une équation du type $0 = b_m$ avec b_m non nul, alors le système n'a pas de solution : (SE) est incompatible.

(ii) Sinon, on retire les équations du type $0 = 0$.

- si (SE) ne possède aucun paramètre alors (SE) possède donc une unique solution.
- si (SE) possède au moins un paramètre alors (SE) admet une infinité de solutions.

Remarque 2 *Un système échelonné a zéro, une unique ou une infinité de solutions.*

3 Méthode du pivot de Gauss

3.1 Opérations élémentaires

Définition 3

Soit (S) un système linéaire à n lignes (ou équations). On note $\mathrm{L}_1, \dots, \mathrm{L}_n$ ses lignes.
On appelle **opérations élémentaires sur les lignes** du système (S) l'une des trois opérations suivantes :

- échanger les lignes L_i et L_j, et on note : $\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_j$.
- multiplier la ligne L_i par un scalaire α non nul, et on note : $\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha \mathrm{L}_i$,
- ajouter à la ligne L_i : $\alpha.\mathrm{L}_j$ $(j \neq i)$, et on note : $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \alpha \mathrm{L}_j$,

Définition 4

Deux systèmes (S) et (S') sont dits **équivalents** si on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note alors $(S) \Longleftrightarrow (S')$.

Théorème 2

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Remarque 3 *Une opération de type* $\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha\mathrm{L}_i + \beta\mathrm{L}_j$ *avec* $\alpha \neq 0$ *transforme également un système en un système équivalent.*

3.2 Principe de la méthode du pivot de Gauss

Le pivot de Gauss est un algorithme permettant de transformer un système quelconque (S) en un système échelonné (SE) en effectuant une succession d'opérations élémentaires. Ainsi, le système échelonné obtenu est équivalent au système initial. La résolution du système (S) revient donc à celle du système échelonné (SE) qui a été traitée dans le paragraphe précédent. Alors le principe de cette méthode est le suivant :

- On choisit une ligne pivot dont le coefficient de x_1 est non nul et si possible égale à 1 et on la place en première position.
- On réalise des opérations sur les autres lignes de façon à annuler les coefficients de x_1 :
$$\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \alpha_i\mathrm{L}_1.$$
- On répète ces opérations sur le sous-système de $n-1$ équations à au plus $p-1$ inconnues obtenu en omettant la première ligne.
- On répète l'étape précédente jusqu'à obtenir un système échelonné.

Remarque 4 *Cette méthode est universelle pour échelonner un système linéaire. Suivant les cas, il peut y avoir une méthode plus courte pour y arriver.*

3.3 Exemples

Exemples 8 *Résoudre le système :* $(S)\begin{cases} x - y - 5z = -6 \\ 2x - y + z = 2 \\ -3x + 2y + z = 1 \end{cases}$

Exemples 9 *Résoudre le système :* $(S)\left\{\begin{array}{r} 2y+z=1 \\ x+y-z=2 \\ x+2y-3z=0 \end{array}\right.$

Exemples 10 *Résoudre le système* $(S)\left\{\begin{array}{l} -4x+3y-z=2 \\ -3x-y-3z=-1 \\ -2x+5y+2z=3 \end{array}\right.$

Exemples 11 *Résoudre le système*

$$(S)\begin{cases} x+4y-z=3 \\ \\ 2x+3y-5z=2 \end{cases}$$

Exemples 12 *Résoudre le système*

$$(S)\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-3y=1 \\ 4x-5y=2 \end{cases}$$