

Chapitre 2: Fonctions d'une variable réelle :

Étude Globale

1 Généralités

1.1 Ensemble de définition

Définition 1

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, alors $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **application** ou **fonction** si elle associe à chaque élément de A un unique élément de $\mathbb{R}$.

On appelle **domaine de définition** de f , et on note D_f , l'ensemble de points $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

Exemples 1 L'ensemble de définition de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathbb{R}^+$.

Exemples 2 Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$.

1.2 Opération sur les fonctions

Définition 2

Soient f et g deux fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}$.

- On appelle **somme des fonctions** f et g , la fonction $f + g$ définie par:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ pour tout } x \in A$$

- On appelle **produit des fonctions** f et g , la fonction fg définie par:

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \text{ pour tout } x \in A$$

- On suppose que : $\forall x \in A, g(x) \neq 0$. On appelle **quotient des fonctions** f et g , la fonction $\frac{f}{g}$ définie par:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ pour tout } x \in A$$

Définition 3

Soient $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(A) \subset B$. On appelle **composée** de la fonction f par la fonction g , la fonction $g \circ f$ définie par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ pour tout } x \in A$$

Exercice 1 Déterminez $D_{\frac{f}{g}}$ et $D_{g \circ f}$.

1.3 Parité

Définition 4

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est **symétrique par rapport à 0**, c'est-à-dire :

$$-x \in D_f, \text{ pour tout } x \in D_f$$

- On dit que la fonction f est **paire** si :

$$f(-x) = f(x), \text{ pour tout } x \in D_f$$

- On dit que la fonction f est **impaire** si

$$f(-x) = -f(x), \text{ pour tout } x \in D_f$$

Exemples 3 • Les fonctions $\cos$ et $x \mapsto x^2$ sont paires.

- Les fonctions $\sin$, $\tan$ et $x \mapsto x^3$ sont impaires.
- La fonction $\exp$ n'est paire ni impaire.

Définition 5

On appelle **représentation graphique** d'une fonction f l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ pour tout $x \in D_f$. On le note souvent par $\mathcal{C}_f$.

Remarque 1 • La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à O .

1.4 Périodicité

Définition 6

Soient f une fonction et T un réel strictement positif.

- On dit que f est **périodique de période T** , ou plus simplement **T -périodique** si :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, x + T \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(x + T) = f(x)$$

- On dit que f est **périodique** s'il existe $T > 0$ telle qu'elle soit T -périodique.

Exemples 4 • Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques.

- La fonction $\tan$ est π -périodique.

Proposition 1

Si $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ est T -périodique alors

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in D_f, f(x + kT) = f(x).$$

Remarque 2 • Pour tracer la représentation graphique d'une fonction T -périodique, il suffit de tracer la courbe sur un intervalle de longueur T puis de translater autant de fois que nécessaire. Autrement dit, une fonction T -périodique est complètement déterminée par son image sur un intervalle de longueur T .

Exemples 5 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2-périodique tel que

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = x \text{ et } \forall x \in [1, 2], f(x) = -x + 2.$$

Tracer la courbe de f sur $[-2, 4]$.

1.5 Restriction du domaine d'étude

Pour réduire le domaine d'étude d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on suit les étapes suivantes.

- Si f est paire ou impaire, on n'étudie f que sur $\mathbb{R}^+$. Le comportement de f sur $\mathbb{R}_-$ est obtenu par symétrie.
- Si f est périodique de période T , on n'étudie f que sur un intervalle de longueur T , habituellement $[0, T]$ ou $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. C'est souvent le cas si f fait intervenir des fonctions trigonométriques. On obtient le comportement de f sur $\mathbb{R}$ par périodicité.
- Si f est paire ou impaire et périodique de période T , on étudie f sur l'intervalle $[0, \frac{T}{2}]$. Par parité, on obtient le comportement de f sur $[-\frac{T}{2}, 0]$. Comme cet intervalle est de longueur T , on en déduit le comportement de f sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

1.6 Monotonie

Définition 7

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que :

- f est **croissante** sur I si
- f est **décroissante** sur I si
- f est **strictement croissante** sur I si
- f est **strictement décroissante** sur I si
- f est **monotone** sur I si elle y est croissante ou décroissante.
- f est **strictement monotone** sur I si elle y est strictement croissante ou décroissante.

Exemples 6 • La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- La somme de deux fonctions croissantes est croissante. En effet :
- La somme de deux fonctions décroissantes est décroissante.
- La composée de deux fonctions monotones de même sens de variation est croissante. En effet :
- La composée de deux fonctions monotones de sens de variation opposés est décroissante. En effet :
- Si $a > 0$ et f est monotone, alors af l'est aussi de même sens que celui de f .

1.7 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 8

Soient f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$. On dit que :

- f est **majorée** sur A si :
- f est **minorée** sur A si :
- f est **bornée** sur A si elle est à la fois majorée et minorée sur A , c'est-à-dire si :
ou encore si :

Exemples 7 1. Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $\exp$ est minorée mais n'est pas majorée.

3. La fonction $\ln$ n'est ni majorée ni minorée.

1.8 Extremums

Définition 9

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in D_f$. On dit que :

- f admet un **maximum en** a si :
- f admet un **minimum en** a si :
- f admet un **extremum en** a si :
- f admet un **maximum** si :
- f admet un **minimum** si :
- f admet un **extremum** si :

1.9 Branches infinies

- On considère un intervalle I et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
- On considère un élément a tel que : $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
- On considère un élément ℓ tel que : $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Définition 10

On dit que f possède une branche infinie en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et si l'un au moins des deux éléments a ou ℓ est égal à $+\infty$ ou $-\infty$.

- Cas 1 : $a = \pm\infty, \ell \in \mathbb{R}$
La branche infinie est une **asymptote horizontale**, d'équation $y = \ell$.
- Cas 2 : $a \in \mathbb{R}, \ell = \pm\infty$
La branche infinie est une **asymptote verticale** d'équation $x = a$.

- Cas 3 : $a = \pm\infty, \ell = \pm\infty$

Dans ce cas, pour connaître la nature de la branche infinie au voisinage de a , on calcule $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = 0$, la branche infinie est une **branche parabolique horizontale**, au voisinage de a .
- Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, la branche infinie est une **branche parabolique verticale**.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on calcule $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - \alpha x)$.
 - * Si $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - \alpha x) = \pm\infty$, la branche infinie est une **branche parabolique oblique** suivant la droite d'équation $y = \alpha x$.

- * Si $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - \alpha x) = \beta$, avec $\beta \in \mathbb{R}$, la branche infinie est une **asymptote oblique** d'équation $y = \alpha x + \beta$, au voisinage de a .

Remarque 3 Si $a = \pm\infty$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ax + b$, alors on peut conclure directement que f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$, au voisinage de a .

1.10 Bijectivité

Définition 11

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est **bijective** si pour tout $y \in F$, l'équation d'inconnue x , $y = f(x)$ **admet une unique solution sur** E .

Autrement dit, $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$.

On dit aussi que f est une **bijection** de E sur F .

Dans ce cas, on définit **l'application réciproque** de f comme l'application notée f^{-1} , définie sur F à valeurs dans E , qui à tout élément y de F associe l'unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Exercice 2 Montrer que $f : x \mapsto 2x + 1$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer f^{-1} .

Exercice 3 Montrer que $g : x \mapsto x^2 + 1$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$ et déterminer g^{-1} .

Théorème 1: Théorème de la bijection strictement monotone

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est continue et strictement monotone, alors elle réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

Exemples 8 Montrer que $f : x \mapsto x^3 + x + 1$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur intervalle à déterminer.

Proposition 2

Soit $f : E \leftarrow F$ une application.

Si f est une bijection, alors il existe $g : F \rightarrow E$ une application telle que :

- $\forall x \in E, g \circ f(x) = x$.
- $\forall y \in F, f \circ g(y) = y$.

Remarque 4 Si f est une fonction bijective, alors les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport au premier bissectrice.

Théorème 2: Théorème de continuité de la fonction réciproque

Soient I et J deux intervalles et $f : I \rightarrow J$ une application bijective de I sur J (on a donc $J = f(I)$).

Si f est continue sur I , alors f^{-1} est continue sur $J = f(I)$.

Exercice 4 • Montrer $f : x \mapsto x^2$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Sa fonction réciproque est la fonction racine carrée $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$.

- Montrer que f^{-1} est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, puis calculer sa dérivée.

2 Dérivation d'une fonction

Définition 12: Nombre dérivé

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dite **dérivable** en $a \in I$ si sa courbe représentative admet une tangente non verticale au point $(a, f(a))$; le coefficient directeur de cette tangente est appelé **nombre dérivé** de f en a et est noté $f'(a)$.

Propriétés 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et dérivable en $a \in I$. Alors la courbe représentative de f admet une tangente au $(a, f(a))$ d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exercice 5 Déterminer le point d'intersection de la tangente à la courbe de $f : x \mapsto xe^{-x}$ au point d'abscisse 2 avec l'axe des abscisses.

Proposition 3: Variations à l'aide de la dérivée

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Alors

- Si $f' = 0$ sur I , alors f est constante sur I .
- Si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur I , alors f est croissante (resp. décroissante) sur I .

- Si $\begin{cases} f' \geq 0 \\ f' \text{ ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur } I \end{cases}$
alors f **strictement croissante** sur I .

- Si $\begin{cases} f' \leq 0 \\ f' \text{ ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur } I \end{cases}$
alors f **strictement décroissante** sur I .

Proposition 4

Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction qui admet une fonction réciproque $g : J \longrightarrow I$.
Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors g est dérivable en $b = f(a)$ et

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f(g(b)))}$$

Théorème 3: Théorème de dérivabilité de la fonction réciproque

Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction qui admet une fonction réciproque $g : J \longrightarrow I$.
Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I (c-à-d $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$), alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Corollaire 1

Sous les mêmes hypothèses que le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, si f est strictement monotone sur I , alors f^{-1} l'est aussi sur $J = f(I)$ et de même sens que celui de f .

Remarque 5 Les variations des fonctions à l'aide de la dérivée est largement utilisé pour montrer des inégalités.

3 Fonctions usuelles : Partie I

3.1 Logarithme népérien

Définition 13

La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Proposition 5

- $\forall x, y > 0, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
- $\forall x > 0, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
- $\forall x, y > 0, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
- $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \ln(x^n) = n \ln(x)$.

Proposition 6: (Limites du logarithme népérien)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$

Exercice 6 Montrer que la fonction $\ln$ réalise une bijection de $I =]0, +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.

Proposition 7

L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$. On note cette solution par e et c'est appelé le **nombre de Néper**.

Courbe représentative de $\ln$

3.2 La fonction exponentielle

Définition 14

La fonction $\ln$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est appelée fonction **exponentielle** et notée $\exp$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)$ se note aussi e^x .

Remarque 6 • $\exp(0) = 1$.

- $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Théorème 4

La fonction $\exp$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x).$$

Exercice 7 Montrer que $\exp(x) \geq x + 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 8

- $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x+y} = e^x e^y$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, e^{nx} = (e^x)^n$

Proposition 9: (Limites de la fonction exponentielle)

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Courbe représentative de $\exp$

3.3 Fonctions puissances

Définition 15: (Puissances entières)

- Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$.
- Si $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}_-$, on pose $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$.
- Si $x \in \mathbb{R}^*$, on convient que $x^0 = 1$.

Définition 16: (Puissances quelconques)

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

ATTENTION ! Si x est négatif, on ne définit pas de puissances non entières de x .

Remarque 7 Les deux définitions des puissances coïncident. Autrement dit, si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$:

Exemples 9 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x = \exp(x \ln e) = \exp(x)$. Ce qui justifie la notation e^x pour désigner $\exp(x)$ l'exponentielle d'un réel x .

Proposition 10

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$.
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$.
- $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$.
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.
- $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} = \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$.

Définition 17: (Fonction puissance)

On appelle **fonction puissance** toute fonction du type $x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 11

- Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- Si $\alpha \in \mathbb{Z}_-$, $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 12

- Si $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
- Si $\alpha \in \mathbb{Z}_-$, $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Graphe de $x \mapsto x^\alpha$ suivant les valeurs de α

3.4 Fonctions racines

Définition 18

- Si n est un entier naturel pair, la fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Sa bijection réciproque est encore appelée la **fonction racine n-ième** et notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Proposition 13

- Si n est un entier naturel impair, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ définie sur $\mathbb{R}$.
- Si n est un entier naturel pair, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

3.5 Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle

Proposition 14

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha \neq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} x^\beta \ln^\gamma x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x}$.
- Si $\beta \neq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\beta \ln^\gamma x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\beta$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln x|^\gamma = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta$.