Chapitre 19: Polynômes et fractions rationnelles

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1

- On appelle **polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ en l'indéterminée X** toute somme de la forme

$$P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \cdots + a_k X^k + \cdots$$

  où $(a_k)_{k \geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang, appelée **suite des coefficients** de P.

- Si tous les coefficients de P sont nuls, on dit que P est **le polynôme nul**.
- Si tous les coefficients de P sont nuls à partir de l'indice 1, on dit que le polynôme est **constant** ($P = a_0$).
- Si tous les coefficients de P sont nuls sauf un, le polynôme est appelé **monôme**, i.e. $P = a_k X^k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
- L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Remarque 1 *Par définition du polynôme P, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall k > n, \quad a_k = 0,$$

Alors :

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n.$$

Exercice 1 *La suite des coefficients de $P = 2 + X - X^2$ est*

Définition 2

Deux polynômes $P = \sum\limits_{n \geq 0} a_n X^n$ et $Q = \sum\limits_{n \geq 0} b_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ sont dits **égaux** s'ils ont les mêmes coefficients.
Ainsi :

$$P = Q \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n.$$

1.2 Somme et multiplication par un scalaire

Définition 3

Soient $P = \sum\limits_{n\geq 0} a_n X^n$ et $Q = \sum\limits_{n\geq 0} b_n X^n \in \mathbb{K}[X]$.
On définit le polynôme $P+Q \in \mathbb{K}[X]$ par

$$P + Q = \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)X^n.$$

Exercice 2 $(2 + X - X^2) + (X^3 + X - 1) = 1 + 2X - X^2 + X^3$.

Définition 4

Soient $P = \sum\limits_{n\geq 0} a_n X^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit le polynôme $\lambda.P \in \mathbb{K}[X]$ par

$$\lambda.P = \sum_{n\geq 0} \lambda a_n X^n.$$

Exercice 3 $2.(X^2 - 1) = 2X^2 - 2$.

1.3 Produit de polynômes

Exercice 4 *Soient $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Définition 5

Soient $P = \sum\limits_{n\geq 0} a_n X^n$ et $Q = \sum\limits_{n\geq 0} b_n X^n \in \mathbb{K}[X]$.
On définit le polynôme $P \times Q \in \mathbb{K}[X]$ par :

$$P \times Q = \sum_{n\geq 0} c_n X^n \quad \text{avec } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Proposition 1

Le produit et la somme des polynômes sont associatifs et commutatifs.
De plus, le produit est distributif par rapport à la somme.

1.4 Composition des polynômes

Définition 6

Soient $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme composé $P \circ Q$ (aussi noté $P(Q)$) par :

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{n \geq 0} a_n Q^n.$$

Exercice 5 *Soit* $P = X^3 - X + 1$.

- $P\left(X^2\right) =$
- $P(X+1) =$
- $P\left(X^2 - X\right) =$

Remarque 2 *Pour* $Q = X$ *et* $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$*, on a* $P(X) =$

Ainsi, un polynôme en l'indéterminé X *peut indifféremment être noté* P *ou* $P(X)$*.*

Proposition 2

Pour tous $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$(\lambda.P + \mu.Q) \circ R = \lambda.P \circ R + \mu.Q \circ R \quad \text{et} \quad (P \times Q) \circ R = (P \circ R) \times (Q \circ R).$$

1.5 Degré

Définition 7

Soient $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ **un polynôme non nul**.

- On appelle **degré du polynôme non nul** P le plus grand $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$, on le note $\deg P$.
  On peut alors écrire $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ avec $a_n \neq 0$.
- Le coefficient a_n est alors appelé **coefficient dominant** de P.
- Si le coefficient dominant est égal à 1, on dit que le polynôme P est **unitaire**.
- Par convention le **degré du polynôme nul** est $-\infty$.

Exercice 6

- $\deg(X^3 + X + 2) =$
- *Si* P *est constant non nul, alors* $\deg(P) =$

Exercice 7 *Déterminer* $\deg(aX + b)$.

Proposition 3

(i) Pour tous $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\deg(\lambda.P) = \begin{cases} \deg P & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

(ii) Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$:

$$\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$$

avec égalité par exemple si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.

(iii) Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$:

$$\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q.$$

(iv) Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$:

$$\deg(P \circ Q) = \deg P . \deg Q.$$

Remarque 3 *Le coefficient dominant de PQ est le produit des coefficients dominants de P et Q.*

Corollaire 1

Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$:

$$PQ = 0 \Longrightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

Définition 8

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égale à n, i.e.

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \ : \ \deg P \leqslant n\}.$$

Exercice 8

- $\mathbb{K}_0[X]$
- $\mathbb{K}_1[X] =$
- $\mathbb{K}_2[X] =$

2 Fonctions polynomiales

2.1 Fonction polynomiale

Définition 9

Soient $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et $x \in \mathbb{K}$. On appelle **valeur du polynôme** P **en** x le nombre

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Exercice 9 *Si $P = 2X^3 + 5X^2 - 3X + 10$, alors $P(1) =$*

Définition 10

On appelle **fonction polynomiale associée à** $P \in \mathbb{K}[X]$ l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} \tilde{P}: & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & P(x) \end{array}$$

Exercice 10 *La fonction polynomiale associée au polynôme* $P = X^2 + 1$ *est :*

Remarque 4 *On verra que* $\tilde{P} = \tilde{Q} \Longleftrightarrow P = Q$*, ce qui explique l'abus de notation habituel :* $\tilde{P}$ *est souvent noté* P*.*

2.2 Algorithme de Horner

3 Division dans $\mathbb{K}[X]$

3.1 Relation de divisibilité

Définition 11

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A **divise** B et on note $A \mid B$ si :

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad B = QA.$$

On dit aussi que B est un **multiple** de A ou encore que A est un **diviseur** de B.

Exercice 11

- $(X+1) \mid (X^3+X^2+X+1)$
- $(X-1) \mid (X^n-1)$
- *Pour tout* $A \in \mathbb{K}[X]$, *on a* $A \mid 0$

Proposition 4

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.
Si A divise B et $B \neq 0$, alors $\deg(A) \leqslant \deg(B)$.

3.2 Division euclidienne

Théorème 1: Théorème de la division euclidienne

Pour tous $A, B \in \mathbb{K}[X]$ **avec** $B \neq 0$ il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ vérifiant

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.$$

Les polynômes Q et R sont appelés respectivement **quotient** et **reste** de la division euclidienne de A par B.

Exercice 12 *Effectuer la division euclidienne de* $A(X) = X^4+X^3-X^2+X-2$ *par* $B(X) = X^2-X+1$.

Corollaire 2

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$. On a

$$B \mid A \iff \text{le reste de la division euclidienne de } A \text{ par } B \text{ est nul.}$$

4 Dérivation

4.1 Dérivée première

Définition 12

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$.
On appelle **polynôme dérivé** de P, le polynôme noté P' défini par :

$$P' = a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}.$$

Exercice 13 *Si* $P = 3X^3 + 2X + 1$ *alors* $P' =$

Proposition 5

- P est constant $\iff P' = 0$.
- Si P est non constant, alors $\deg P' = \deg P - 1$.

Proposition 6

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) $(P+Q)' = P' + Q'$.

(ii) $(\lambda P)' = \lambda P'$.

(iii) $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

(iv) $(P \circ Q)' = Q' \times P' \circ Q$.

(v) $(P^n)' = nP'P^{n-1}$.

4.2 Dérivée d'ordre supérieur

Définition 13

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On appelle **n-ième polynôme dérivé** de P, le polynôme noté $P^{(k)}$ défini par la relation de récurrence :

$$P^{(0)} = P \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N},\ P^{(n+1)} = \left(P^{(n)}\right)'.$$

Exercice 14 $P^{(0)} = P$, $P^{(1)} = P'$, $P^{(2)} = (P')' = P''$.

Proposition 7

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Si $\deg P < n$ alors $P^{(n)} = 0$.
- Si $\deg P \geqslant n$ alors $\deg P^{(n)} = \deg P - n$.

Proposition 8

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(i) $(P+Q)^{(n)} = P^{(n)} + Q^{(n)}$.

(ii) $(\lambda P)^{(n)} = \lambda P^{(n)}$.

(iii) $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} P^{(k)} Q^{(n-k)}$ **(Formule de Leibniz).**

4.3 Formule de Taylor polynomiale

Théorème 2: (Formule de Taylor)

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. On a

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

ou encore

$$P(X) = \sum_{k \geq 0} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

5 Racines d'un polynôme

5.1 Définitions et propriétés

Définition 14

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une **racine** de P si $P(a) = 0$.

Exercice 15

- 0 *est racine du polynôme* $P = 3X^5 - 2X^2 + 7X$ *car*
- 2 *est racine du polynôme* $Q = X^2 - 5X + 6$ *car*

Proposition 9

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.
Alors, a est une racine de P **si et seulement si** $X - a$ divise P ou encore P se factorise par $X - a$, i.e.

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P = (X-a)Q \quad \text{avec } \deg(Q) = \deg(P) - 1.$$

Exercice 16 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X-1 \mid X^n - 1$.*

Corollaire 3

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ des racines **distinctes** de P.
Alors, $(X-a_1)\cdots(X-a_n) \mid P$ ou encore P se factorise par $(X-a_1)\cdots(X-a_n)$, i.e.

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P = (X-a_1)\cdots(X-a_n)Q(X) \quad \text{avec } \deg(Q) = \deg P - n.$$

Exercice 17 *Montrer que l'on peut factoriser $P = X^3 + X^2 - 3X + 1$ par $X^2 - 1$.*

5.2 Racines multiples

Définition 15

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$.
On appelle **ordre de multiplicité** de a en tant que racine de P le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m \mid P$, i.e.

$$m = \max\{k \in \mathbb{N} \ : \ (X-a)^k \mid P\}.$$

Si $m = 1$ on parle de **racine simple**.
Si $m = 2$ on parle de **racine double**.

Remarque 5

- ▶ *a est une racine d'ordre m de P $\iff$*
- ▶ *a est une racine d'ordre au moins m de P $\iff$*
- ▶ *a est une racine d'ordre 0 de P $\iff$*
- ▶ *a est une racine de P $\iff$*

Exercice 18 *Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $P = (X-a)(X-b)^2(X-c)^3$.*
Alors, P possède trois racines distinctes :

-
-
-

*On dit en revanche que P possède **6 racines comptées avec multiplicité**, car* $6 = 1 + 2 + 3$.

Proposition 10

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Si a est une racine de P d'ordre de multiplicité m, alors a est racine de P' d'ordre de multiplicité $m-1$.

Théorème 3

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$. On a équivalence entre :

(i) a est racine d'ordre de multiplicité m de P;

(ii) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

On a aussi équivalence entre :

(i) a est racine d'ordre de multiplicité au moins m de P;

(ii) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$.

Exercice 19 *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (X-1)^3 \mid nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$$

5.3 Nombre de racines

Proposition 11

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a_1, \ldots, a_r$ des racines deux à deux distinctes de P de multiplicités respectives au moins égales à $m_1, \ldots, m_r$ alors

$$(X-a_1)^{m_1} \cdots (X-a_r)^{m_r} \text{ divise } P.$$

Par conséquent, si P est non nul, alors P possède au plus $\deg(P)$ racines comptées avec multiplicité.

Corollaire 4

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$.
Si $\deg(P) \leqslant n$ et P admet au moins $n+1$ racines, alors P est le polynôme nul.

Exercice 20 *Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$. Montrer que P est nul.*

Corollaire 5

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ possède une infinité de racines alors $P = 0$.

Exercice 21 *Soit P un polynôme tel que*

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P(\sin\theta) = 0$$

Montrer que P est le polynôme nul.

Corollaire 6

Si $\tilde{P} = \tilde{Q}$ alors $P = Q$.

5.4 Polynômes scindés et relations coefficients/racines

Définition 16

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ **non constant** de degré n est dit **scindé dans** $\mathbb{K}[X]$ si l'on peut écrire :

$$P = \lambda(X - x_1)\cdots(X - x_n) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ et } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}.$$

Cela revient à dire que P possède exactement $n = \deg(P)$ racines dans $\mathbb{K}$ comptées avec multiplicité.

Remarque 6 *Si tel est le cas :*

- *λ est le coefficient dominant de P;*
- *n est le degré de P;*
- *$x_1, \ldots, x_n$ sont ses racines dans $\mathbb{K}$.*

Exercice 22
- *$X^2 - 5X + 6$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$*
- *$X^2 + 1$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$*
- *$X^2 + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$*

Théorème 4

Soit $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ scindé de degré n.
On note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de P comptées avec multiplicité (éventuellement répétées). Alors :

- **La somme des racines :** $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$.
- **Le produit des racines :** $x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Exercice 23 *Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré 2 scindé sur $\mathbb{K}$.*
Notons x_1 et x_2 ses racines.
Alors :

6 Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$

6.1 Polynômes irréductibles

Définition 17

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme **non constant**. On dit que P est **irréductible dans** $\mathbb{K}[X]$ si P ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes non constants de $\mathbb{K}[X]$.

Exemples 1 *Tout polynôme de degré* 1 *est irréductible.*

Exemples 2 *Tout polynôme de degré $n \geqslant 2$ qui admet une racine dans $\mathbb{K}$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.*

Exemples 3 *Le polynôme X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$.*

6.2 Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 5: (Théorème de d'Alembert-Gauss)

Tout polynôme **non constant** de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Exercice 24 *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3 et de coefficient dominant λ.*
Montrer qu'il existe $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ tels que : $P(X) = \lambda(X-a_1)(X-a_2)(X-a_3)$.

Corollaire 7

Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Corollaire 8: (Factorisation das $\mathbb{C}[X]$)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé. Il se décompose donc sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X-a_k)^{m_k},$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $a_1, \dots, a_r$ sont les racines de P de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$.

Exercice 25 *Soit $a \in \mathbb{R}$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme : $X^2 - 2X\cos a + 1$.*

Exercice 26 *Factorisons dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^n - 1$.*

6.3 Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 27

1. *Soient $A(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients réels et $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que :* $A(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow A(\bar{\alpha}) = 0$.
2. *Soient P un polynôme à coefficients réels et $\alpha \in \mathbb{C}$. Démontre que α est une racine de P d'ordre m si, et seulement si, $\bar{\alpha}$ est une racine d'ordre m de P.*

Alors, on vient de montrer la proposition suivante :

Proposition 12

Soit P un polynôme à **coefficients réels**.
Si α est une racine complexe de P, alors $\bar{\alpha}$ est également une racine de P et sa multiplicité est la même que celle de α.

Théorème 6

Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif (i.e. sans racines réelles).

Exercice 28

- *Le polynôme $X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.*
- *Le polynôme $X^4 + X + 1$ est n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.*

Théorème 7: (Factorisation das $\mathbb{R}[X]$)

Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ se décompose dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - a_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{s} (X^2 + b_j X + c_j)^{n_j},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, $a_1, \ldots, a_r$ sont les racines réelles distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_r$ et les polynômes $X^2 + b_j X + c_j$ ont un discriminant strictement négatif.

Remarque 7 *Pour décomposer un polynôme réel dans $\mathbb{R}[X]$, on le décompose d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ puis on regroupe les facteurs de la forme $X - a$ et $X - \bar{a}$ en $(X - a)(X - \bar{a})$ qui est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.*

Exercice 29 *Factorisons dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^5 - 1$.*

7 Fractions rationnelles

7.1 Définitions

Définition 18

On appelle fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout quotient de la forme $\frac{P}{Q}$, où $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \neq 0$. L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}(X)$.

Exemples 4

$$\frac{2X^4 + 3X^2}{X^3 - X} = \frac{2X^3 + 3X}{X^2 - 1} \in \mathbb{R}(X).$$

$$\frac{X^2 + iX}{X^3 - X^2 + 1} \in \mathbb{C}(X).$$

Définition 19

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On dit que $\frac{P}{Q}$ est une forme irréductible de F si P et Q n'ont pas des diviseurs communs autre que les polynômes constants non nuls.

Exercice 30 *Considérons la fraction rationnelle $F = \frac{X^2-1}{X^2+2X+1} = \frac{X-1}{X+1} \in \mathbb{R}(X)$. Alors $\frac{X-1}{X+1}$ est une forme irréductible de F, mais $\frac{X^2-1}{X^2+2X+1}$ ne l'est pas.*

7.2 Degré d'une fraction rationnelle

Définition 20

Soit une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. Le degré de F est défini par :

$$\deg F = \deg P - \deg Q.$$

Exercice 31

$$\deg\left(\frac{X^2+3X-1}{X-2}\right) =$$
$$\deg\left(\frac{1}{X^n-1}\right) =$$

7.3 Pôles et zéros d'une fraction rationnelle

Définition 21

Soient $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ donnée sous une forme irréductible, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$.

1. On dit que a est un zéro de F (de multiplicité m) si a est une racine de P (de multiplicité m).
2. On dit que a est un pôle de F (de multiplicité m) si a est une racine de Q (de multiplicité m).

7.4 Partie entière d'une fraction rationnelle

Définition 22

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. Le quotient de la division euclidienne de P par Q est appelée la partie entière de la fraction rationnelle F.

Remarque 8 *Si* $\deg F < 0$*, i.e.* $\deg P < \deg Q$*, alors la partie entière de* F *est nulle.*

Exercice 32 *Déterminer la partie entière de* $F = \frac{X^4-X^2+1}{X^2+1}$.

7.5 Décomposition en éléments simples

Théorème 8: Admis

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, donnée sous une forme irréductible. On suppose que Q est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$:

$$Q = \lambda(X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_n).$$

Alors, la fraction F s'écrit de façon unique sous la forme:

$$F = E + \frac{\lambda_1}{X-a_1} + \frac{\lambda_2}{X-a_2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X-a_n},$$

où E est la partie entière de F et $\lambda_k \in \mathbb{K}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Cette écriture est appelée la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{K}(X)$.

Exercice 33 *Décomposer en éléments simples dans* $\mathbb{R}(X)$ *la fraction*

$$F = \frac{X}{(X-1)(X+1)(X-2)}.$$

Exercice 34 *1. Décomposer en éléments simples dans* $\mathbb{R}(X)$ *la fraction* $F = \frac{X^2+1}{X^2-1}$.

2. Déterminer une primitive de la fonction $f : t \mapsto \frac{t^2+1}{t^2-1}$ *sur* $|1, +\infty|$.

Exercice 35 *1. Décomposer en éléments simples* $F = \frac{1}{X(X+1)(X+2)}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Calculer*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Exercice 36 *On admet qu'il existe d'uniques réels* a, b, c, d *tels que :*

$$\frac{3X-1}{(X-1)^2(X^2+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$

1. Déterminer a, b, c et d.
2. Déduire une primitive de $f : t \mapsto \frac{3t-1}{(t-1)^2(t^2+1)}$ sur $|1, +\infty|$.