

Chapitre 18: Calcul Matriciel

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
- Les lettres n, p, q, r désignent des entiers naturels non nuls.

1 Généralités sur les matrices

1.1 Définitions

Définition 1

- On appelle **matrice à n lignes et p colonnes, et à coefficients dans \mathbb{K}** , tout tableau de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

où $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$.

- ▶ On parle aussi de **matrice de taille $n \times p$ et à coefficients dans \mathbb{K}** .
 - ▶ On note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ ou tout simplement $A = (a_{ij})$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.
 - ▶ $a_{i,j}$ s'appelle le **coefficient de A de position (i, j)** ; on le note aussi $[A]_{i,j}$.
 - ▶ Lorsque $n = p$, on parle de **matrice carrée** de taille n .
 - ▶ Lorsque $p = 1$, on parle de **matrice colonne** de taille n .
 - ▶ Lorsque $n = 1$, on parle de **matrices ligne** de taille p .
- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans \mathbb{K} de taille $n \times p$. Lorsque $n = p$, cet ensemble est tout simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples 1 • $\begin{pmatrix} 1 & e & 3 \\ \ln 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

• $\begin{pmatrix} 0 & -2+i \\ 0 & i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}$

• $\begin{pmatrix} 1 & e \\ \ln 2 & 5 \end{pmatrix}$

• $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

• $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exemples 2 • $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K}) =$

• $\mathcal{M}_2(\mathbb{K}) =$

Remarque 1 On confond $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ à \mathbb{K} . Autrement dit : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, (\lambda) = \lambda$.

Définition 2

La matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée **matrice nulle** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Elle est notée $0_{n,p}$ ou 0 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemples 3 La matrice nulle de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ est :

Définition 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On dit que les matrices A et B sont égales si

$$\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, p], \quad a_{i,j} = b_{i,j}.$$

Dans cas cas, on note $A = B$.

1.2 Matrices carrées particulières

Définition 4

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une **matrice carrée** de taille n .

- On dit que A est **triangulaire supérieure** lorsque

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i > j \implies a_{ij} = 0,$$

c'est-à-dire lorsque A est de la forme

- On dit que A est **triangulaire inférieure** lorsque

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i < j \implies a_{ij} = 0,$$

c'est-à-dire lorsque A est de la forme

- On dit que A est **diagonale** lorsque

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies a_{ij} = 0,$$

c'est-à-dire lorsque A est de la forme

Cette matrice se note

- On dit que A est **scalaire** lorsqu'elle est diagonale et que ses coefficients diagonaux sont égaux, c'est-à-dire lorsque A est de la forme

Exemples 4 • Exemples de matrices triangulaires supérieures :

• Exemples de matrices triangulaires inférieures :

• Exemples de matrices diagonales :

1.3 Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 5

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

• La **somme des matrices A et B** est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée $A + B$ et définie par :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

• Le **produit de la matrice A par le scalaire λ** est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée λA et définie par :

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

Remarque 2 On ne peut pas sommer des matrices de tailles différentes.

Exemples 5 Si :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

alors :

Proposition 1

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a :

- (i) L'addition est associative : $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- (ii) L'addition est commutative : $A + B = B + A$.
- (iii) Distributivité à droite : $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
- (iv) Distributivité à gauche : $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
- (v) Compatibilité de la multiplication : $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

1.4 Transposée d'une matrice

Définition 6

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée de la matrice A** , la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée tA ou A^T , et définie par :

$${}^tA = (a_{j,i})_{i,j}.$$

Remarque 3 • Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$: $[{}^tA]_{i,j} = [A]_{j,i}$.

- Les colonnes de tA sont les lignes de A et inversement.

Exemples 6 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Alors

Proposition 2

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a :

- (i) ${}^t({}^tA) = A$,
- (ii) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$,
- (iii) ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$.

1.5 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est **symétrique** si ${}^tA = A$.
- On dit que A est **antisymétrique** si ${}^tA = -A$.

On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples 7

2 Produit de matrices

2.1 Définition

Définition 8: Produit d'une ligne et une colonne

Soit $L = (x_k)_{1 \leq k \leq p}$ une matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ et $C = (y_k)_{1 \leq k \leq p}$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On définit le produit LC par :

$$LC := \sum_{k=1}^p x_k y_k$$

Définition 9: Produit de deux matrices

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ de sorte que **le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B** . On appelle **produit de la matrice A par la matrice B** , la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ notée AB et définie par :

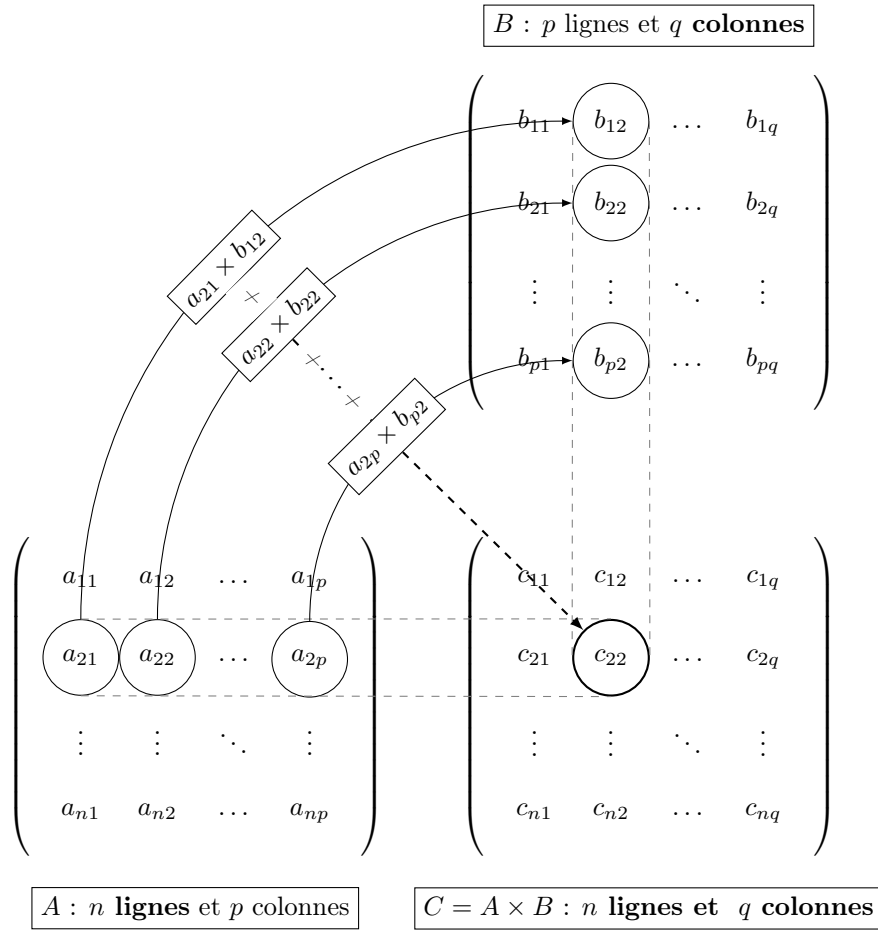
$$AB = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}, \quad \text{avec} \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}.$$

Remarque 4 Sous les hypothèses de la définition précédente : $c_{ij} = L_i(A)C_j(B)$.

Exemples 8 • $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Illustration du produit matriciel :



Remarque 5 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

- Pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, la j -ème colonne de AB est AC_j avec C_j la j -ième colonne de B .
- Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la i -ème ligne de AB est $L_i B$ avec L_i la i -ième ligne de A .

2.2 Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures/inférieures

Proposition 3

- Si A et B sont deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors AB est une matrice diagonale :
- Si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors AB est une matrice triangulaire supérieure :
- Si A et B sont deux matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors AB est une matrice triangulaire inférieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

Exemples 9 • $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

• $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$

$$\bullet \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

2.3 Propriétés

Proposition 4

Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

(i) Le produit matriciel est associatif : $A(BC) = (AB)C$.

(ii) Le produit matriciel est bilinéaire :

$$A(B + B') = AB + AB' \quad \text{et} \quad (A + A')B = AB + A'B.$$

(iii) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

(iv) ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

Remarque 6 • En général, deux matrices ne commutent pas

• Contrairement à ce qu'on a avec le produit de nombres réels ou complexes :

$$A \times B = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Un contre-exemple :

$$\text{On a : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ mais } AB =$$

2.4 Matrice identité

Définition 10

La matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, \dots, 1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

est appelée la **matrice identité** de taille n et notée I_n .

Exemples 10

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemples 11 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$.

$$\bullet I_2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} =$$

$$\bullet A \times I_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Proposition 5

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a :

$$I_n \times A = A \quad \text{et} \quad A \times I_p = A.$$

2.5 Matrices élémentaires

Définition 11

On appelle **matrice élémentaire** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf un qui est égal à 1.

Lorsque le coefficient 1 de la matrice élémentaire se trouve en position (i, j) , cette matrice élémentaire se note $E_{i,j}$.

Exemples 12 Matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$:

Exemples 13

Proposition 6

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\forall i, j, k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad E_{ij} \times E_{k,\ell} = \delta_{jk} E_{i\ell}.$$

2.6 Écriture matricielle d'un système linéaire

Exemples 14 Soit $(S) \begin{cases} 2x - 3y + z + t = a \\ x + 2y - z - 3t = b \\ -x - y + 2t = c \end{cases}$

Proposition 7

On considère un système linéaire (S) de n équations à p inconnues x_1, \dots, x_p réelles ou complexes de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Alors :

2.7 Puissances de matrices carrées

Définition 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose :

$$A^0 = I_n \quad \text{et} \quad A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

Proposition 8

Soit $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale. Alors : $A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.

Définition 13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice A est **nilpotente** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier k tel que $A^k = 0$ s'appelle **l'indice de nilpotence** de A .

Exemples 15 Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que J est nilpotente.

Théorème 1: (Formule du binôme)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ deux matrices carrées telles que $AB = BA$ (A et B commutent). Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Attention : Le résultat est faux si les matrices ne commutent pas. Par exemple, on a :

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Exemples 16 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en exploitant la matrice

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ introduite dans l'exemple précédent.

3 Matrices carrées inversibles

3.1 Définition

Proposition-Définition 1

- Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice carrée $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$.
La matrice B , lorsqu'elle existe, est unique, on l'appelle **l'inverse de A** et on la note A^{-1} .
- L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles est noté $GL_n(\mathbb{K})$ et appelé **groupe linéaire d'ordre n** .

Exemples 17 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA , puis conclure.

Exemples 18 • I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$ car

• 0_n n'est pas inversible car

Proposition 9

Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est inversible **si et seulement si** ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Exemples 19 • $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

• $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

• $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

• $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 10

Soit $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale. Alors :

$$A \text{ est inversible} \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k \neq 0.$$

Dans ce cas, $A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$.

Exemples 20 • $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

• $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 11

- Si A est une matrice triangulaire supérieure et inversible, alors A^{-1} l'est aussi.
- Si A est une matrice triangulaire inférieure et inversible, alors A^{-1} l'est aussi.

Proposition 12

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles, $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Alors

- (i) A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$;
- (ii) AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- (iii) A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
- (iv) λA est inversible et $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.
- (v) tA est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

3.2 Matrices inversibles et systèmes linéaires

Proposition 13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors, A est inversible **si et seulement si**, pour tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = Y$

d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet une unique solution. Dans ce cas, on a $X = A^{-1}Y$.

Exemples 21 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

3.3 Matrices échelonnées

Définition 14

On dit qu'une matrice est **échelonnée par lignes** si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros. Dans ce cas, la première valeur non nulle de chaque ligne non nulle s'appelle un **pivot** de la matrice.

Exemples 22 • La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

• La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.4 Opérations élémentaires

Définition 15

On appelle **opérations élémentaires sur les lignes** d'une matrice les opérations suivantes :

- ▶ Échange de deux lignes, notée $L_i \leftrightarrow L_j$;
- ▶ Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul α , notée $L_i \leftarrow \alpha L_i$;
- ▶ Addition d'un multiple d'une ligne à une autre, notée $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

On définit de même les **opérations élémentaires sur les colonnes** :

- ▶ Échange de deux colonnes, notée $C_i \leftrightarrow C_j$;
- ▶ Multiplication d'une colonne par un scalaire non nul α , notée $C_i \leftarrow \alpha C_i$;
- ▶ Addition d'un multiple d'une colonne à une autre, notée $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$.

Définition 16

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On dit que les matrices A et B sont **équivalentes par lignes** (resp. **colonnes**), et on note $A \stackrel{L}{\sim} B$ (resp. $A \stackrel{C}{\sim} B$), si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes).

Proposition 14

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices carrées.

Si A et B sont équivalentes par lignes ($A \stackrel{L}{\sim} B$), alors :

$$A \text{ est inversible} \iff B \text{ est inversible} .$$

Proposition 15

Toute matrice est équivalente par lignes (resp. colonnes) à une matrice échelonnée.

Exemples 23 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible.

3.5 Algorithme de Gauss-Jordan

Proposition 16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.

Alors, il existe une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme A en I_n . De plus, cette suite d'opérations élémentaires transforme I_n en A^{-1} .

Exemples 24 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .