

Chapitre 17: Fonctions à une variable réelle (5): Développements Limités

1 Développement limité d'une fonction

Définition 1: DL d'une fonction

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ou extrémité finie de I et $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f admet un **développement limité d'ordre n en x_0** , noté $DL_n(x_0)$, s'il existe des réels a_0, \dots, a_n tels que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

ce qui signifie que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0$$

ou qui signifie encore :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

La fonction polynomiale $x \mapsto a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$ s'appelle **la partie régulière** du développement limité.

Exemples 1 1. \sin admet un $DL_1(0)$: $\sin(x) = x + o(x)$.

2. \cos admet un $DL_2(0)$: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

3. Si f est une fonction dérivable en x_0 , alors f admet un $DL_1(x_0)$: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$.

Exercice 1 Montrer que \tan admet un $DL_1(0)$.

Exercice 2 Soit $n \geq 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ admet un $DL_n(0)$ tel que :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + o(x^n)$$

Définition 2: Forme Normalisée d'un DL

Supposons que f est une fonction admettant un $DL_n(x_0)$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Si p est le plus petit entier $k \leq n$ tel que $a_k \neq 0$, alors

$$f(x) = (x - x_0)^p (a_p + \cdots + a_n(x - x_0)^{n-p} + o((x - x_0)^{n-p}))$$

Cette écriture est appelé **forme normalisée** du développement limité d'ordre n de f en x_0 .

Exercice 3 Si $f(x) = x^2 - \frac{x^3}{4} + x^6 + o(x^6)$ au voisinage de 0, déterminer la forme normalisée.

Théorème 1: Unicité du DL

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction, $a \in I$ ou une extrémité finie de I et $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que f admet des $DL_n(x_0)$:

$$\begin{cases} f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \\ f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \end{cases}$$

Alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = b_k$.

Corollaire 1: DL d'une fonction paire/impaire

Soit

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$$

le développement limité à l'ordre n de f au voisinage de 0.

- Si f est paire, alors pour tout k impair $\in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = 0$.
- Si f est impaire, alors pour tout k pair $\in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = 0$.

Propriétés 1: Règle de troncature

Si

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

est le développement limité à l'ordre n de f au voisinage de x_0 .

Alors, pour tout $p \leq n$, Soit

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_p(x - x_0)^p + o((x - x_0)^p)$$

est le développement limité à l'ordre p de f au voisinage de x_0 .

Proposition 1: Caractérisation de la continuité et la dérivabilité

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction et $x_0 \in I$ ou une extrémité finie de I .

- f admet un $DL_0(x_0)$ si, et seulement si f admet une limite finie en x_0 .
De plus, si $f(x) = a_0 + o(1)$, au voisinage de x_0 , alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_0$.
- En particulier, si f est définie en x_0 , alors f admet un $DL_0(x_0)$ si, et seulement si f est continue en x_0 .
- Sous l'hypothèse que f soit définie en x_0 :
 f est définie en x_0 , alors f admet un $DL_1(x_0)$ si, et seulement si f est dérivable en x_0 .
Dans ce cas, on a $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$.

Propriétés 2: Opérations sur les DLs

Soient f et g deux fonctions admettant des $DL_n(0)$:

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \text{ et } g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

où P et Q sont des polynômes de degrés $\leq n$.

- **DL d'une combinaison linéaire** : Si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f + \lambda g$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est $P(x) + \lambda Q(x)$:

$$f(x) + \lambda g(x) = P(x) + \lambda Q(x) + o(x^n)$$

- **DL du produit** : fg admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est $[P(x)Q(x)]_n$, i.e $P(x)Q(x)$ tronquée au degré n :

$$f(x)g(x) = [P(x)Q(x)]_n + o(x^n)$$

- **DL d'une composée** : Si $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, alors $f \circ g$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est $[P \circ Q(x)]_n$:

$$f \circ g(x) = [P \circ Q(x)]_n + o(x^n)$$

- **Inversion d'un DL** : Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ admet un $DL_n(0)$ qui s'obtient grâce au $DL_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Proposition 2: Primitivation d'un DL

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction dérivable en x_0 dont la dérivée admet un $DL_n(x_0)$:

$$f'(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Alors, f admet un $DL_{n+1}(x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + o((x - x_0)^{n+1})$$

Exercice 4 1. Montrer que $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

2. Donner un $DL_3(0)$ de la fonction tangente.

3. En déduire un $DL_3(0)$ de $x \mapsto \tan(x) - \sin(x)$.

4. Montrer que $x \mapsto \ln(1+x)$ admet un $DL_n(0)$, avec $n \geq 1$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

5. Trouver le $DL_{2n}(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

6. En déduire que $x \mapsto \arctan(x)$ admet un $DL_{2n+1}(0)$:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

2 Formule de Taylor-Young et DL des fonctions usuelles

Théorème 2: Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^n .

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x_0 \in I$, f admet un $DL_n(x_0)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Exemples 2 *Expliciter la formule de Taylor-Young pour $n = 3$.*

Exercice 5 1. Montrer que la fonction exponentielle admet un $DL_n(0)$ telle que :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

2. Soit $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ définie sur $] -1, +\infty[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$ et que pour tout $x \geq -1$:

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$$

(b) En déduire le $DL_n(0)$ de f .

Développements des fonctions usuelles en 0

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \cosh(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\ \sinh(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n}) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\ \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ \arctan(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n}) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\ \tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

3 Applications

3.1 DL en un point autre que 0

Méthode

Pour calculer un DL en un point x_0 autre que 0, on effectue le changement de variable $h = x - x_0$ de sorte que l'on se ramène à l'étude d'un DL au voisinage de 0.

Exercice 6 Déterminer un $DL_3(2)$ de $\ln(x)$.

3.2 Recherche d'un équivalent simple

Proposition 3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ou extrémité de I et $n \in \mathbb{N}$.

Si f admet un $DL_n(x_0)$:

$$f(x) = a_p(x - x_0)^p + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

avec $a_p \neq 0$, alors :

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} a_p(x - x_0)^p.$$

Exercice 7 Déterminer un équivalent simple de $\tan x - \arctan x$ en 0.

3.3 Détermination de limite

Méthode

Rappelons que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff f(x) = \ell + o(1).$$

Exercice 8 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^3}$.

3.4 Exemples de développements asymptotiques

Exercice 9 Montrer que : $x^x \underset{x \rightarrow 0^+}{=} 1 + x \ln x + o(x \ln x)$.

Exercice 10 Montrer que : $\ln(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

3.5 Asymptotes

Définition 3

Soit f une fonction définie au voisinage de ∞ .

On dit que \mathcal{C}_f admet une **asymptote** d'équation $y = ax + b$ si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Exercice 11 On pose : $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. En déduire que \mathcal{C}_f une asymptote en $+\infty$ en précisant sa position par rapport à \mathcal{C}_f .

3.6 Extremum local

Proposition 4

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I **qui n'est pas une extrémité de I** . On suppose que f admet un $DL_2(x_0)$:

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

- (i) Si f admet un extremum local en x_0 , alors $b = 0$.
- (ii) Réciproquement, si $b = 0$, alors $f(x) - f(x_0) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} c(x - x_0)^2$ et par suite :
 - ▶ si $c > 0$, alors f admet un minimum local en x_0 ,
 - ▶ si $c < 0$, alors f admet un maximum local en x_0 .

Exercice 12 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x \sin x}{1+x^2}$ possède un minimum local en 0 .