Chapitre 16: Fonctions à une variable réelle (4): Dérivabilité

1 Dérivation d'une fonction

Définition 1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in I$.

On dit que f est **dérivable en** x_0 si le taux d'accroissement $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, définie sur $I - \{x_0\}$ admet une limite l en x_0.
Dans ce cas, l est notée par $f'(x_0)$ et est appelée **la dérivée de** f **en** x_0, ou le nombre dérivée de f en x_0.

Remarque 1 *1. Sous les données de la définition,*

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h}.$$

2. La dérivabilité de f en x_0 ne dépend que du comportement de f au voisinage de x_0.

Exercice 1 *Étudier la dérivabilité de f en x_0 dans chacun des cas suivants:*

1. $f : x \longmapsto c$, où c est une constante de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

2. $f : x \longmapsto x$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

3. $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ *en* $x_0 = 0$.

4. $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x_0 = 0$.

Proposition 1

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, alors f est dérivable en $x_0 \in I$ si, et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que
$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0), \text{ au voisinage de } x_0$$

Propriétés 1

Si f est dérivable en x_0, alors la courbe de f admet une tangente, au point $(x_0, f(x_0))$, d'équation :
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Définition 2: Dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et soit $x_0 \in I$.
On dit que f est **dérivable en** x_0 si la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, définie sur $I - \{x_0\}$ admet une limite l en x_0.
Dans ce cas, l est notée par $f'(x_0)$ et est appelée **la dérivée de** f **en** x_0, ou le nombre dérivée de f en x_0.

Proposition 2

Sous les hypothèses de la définition précédente, f est dérivable en x_0 si et seulement si les fonctions $Re(f)$ et $Im(f)$ le sont.
Dans ce cas, on a $f'(x_0) = Re(f)'(x_0) + iIm(f)'(x_0)$.

Proposition 3: Dérivabilité et continuité

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Remarque 2 *La réciproque est fausse. Contre exemple ?*

Définition 3: Dérivabilité à gauche et à droite

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.

- Si x_0 n'est pas une extrémité à gauche :
  On dit que f est **dérivable à gauche en** x_0 si la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$ à gauche en x_0.
  Dans ce cas, on note cette limite par $f'_g(x_0)$, et on l'appelle **le nombre dérivée à gauche de** f en x_0.

- Si x_0 n'est pas une extrémité à droite :
  On dit que f est **dérivable à droite en** x_0 si la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$ à droite e en x_0.
  Dans ce cas, on note cette limite par $f'_d(x_0)$, et on l'appelle **le nombre dérivée à droite de** f en x_0.

Remarque 3 *Sous les données de la définition,*

1. $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h}$.

   De plus, la demi-droite $\begin{cases} x \leq x_0 \\ y = f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \end{cases}$ *est appelée* ***la demi-tangente à gauche de*** f *en* x_0.

2. $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h}$.

   De plus, la demi-droite $\begin{cases} x \geq x_0 \\ y = f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \end{cases}$ *est appelée* ***la demi-tangente à droite de*** f *en* x_0.

Proposition 4

Soit $x_0 \in I$ une point distinct des bornes de I et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors,
f est dérivable en x_0 si, et seulement si f est dérivable à gauche, et à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.
Dans ce cas, $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exercice 2 *Étudier la dérivabilité de la fonction suivante en* 0 *:*
$x \longmapsto |\sin(x)|$.

Définition 4: Dérivabilité sur un intervalle

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
f est dite **dérivable sur** I si elle dérivable en tout point de I.
Dans ce cas on définit la fonction dite **dérivée de** f et, qu'on note par f', par $f' : x \longmapsto f'(x)$.

Propriétés 2: Exemples de référence

- Les fonctions $\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh, \tanh$ et $\arctan$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carré et la fonction $\ln$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$.
- Les fonctions arccos et arcsin sont dérivables sur $]-1, 1[$.
- La fonction tan est dérivable sur chaque intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} - k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, avec $k \in \mathbb{Z}$, donc en particulier sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Propriétés 3: Opérations sur les fonctions dérivables

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $x_0 \in I$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

- **Combinaison linéaire :** $f + \lambda.g$ est dérivable en x_0 et $(f + \lambda.g)'(x_0) = f'(x_0) + \lambda.g'(x_0)$.
- **Produit :** fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
- **Inverse :** Si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.
- **Quotient:** Si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{g}{f}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{g}{f}\right) = \frac{g'(x_0)f(x_0) - g(x_0)f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

Remarque 4 *Les résultats dans* ***Propriétés 3*** *sont vrais aussi pour la dérivabilité sur l'intervalle I.*

Proposition 5: Dérivabilité de la fonction composée

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $f(I) \subseteq J$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0, et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0).g'(f(x_0))$$

Remarque 5 *Ce résultat est vrai sur l'intervalle I aussi et on aura $(g \circ f)' = f'.g' \circ f$.*

Théorème 1: Dérivabilité de la fonction réciproque

Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection. Si f est dérivable sur I et si f **ne s'annule pas sur** I, alors la bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est dérivable sur J telle que pour tout $y \in J$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Définition 5: Extremum local

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f admet un **maximum local** en $a \in I$ si f admet en a un maximum au voisinage de a, i.e. si
$$\exists \delta > 0, \forall x \in]a-\delta, a+\delta[\cap I, f(x) \leq f(a)$$
- On dit que f admet un **minimum local** en $a \in I$ si f admet en a un minimum au voisinage de a, i.e. si
$$\exists \delta > 0, \forall x \in]a-\delta, a+\delta[\cap I, f(x) \geq f(a)$$
- On dit que f admet un **extremum local** en a si elle admet en a un minimum local ou un maximum local.

Définition 6: Point critique

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a, un point intérieur de I.
a est dit un **point critique** de f si $f'(a) = 0$.

Proposition 6: CN pour qu'un point soit un extremum local

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$ qui n'est pas une extrémité de I. On suppose de plus que f est dérivable en a. Si f admet en a un extremum local, alors a est point critique de f.

Remarque 6 *La réciproque est fausse. La fonction $x \longmapsto x^3$ comme un contre-exemple.*

2 Deux théorèmes sur les fonctions dérivables

Lemme 1

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Alors f admet un extremem local en un point $c \in]a, b[$.

Théorème 2: Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
Si :

- f est continue sur $[a, b]$.
- f est dérivable sur $]a, b[$.
- $f(a) = f(b)$.

Alors : $\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = 0$

Remarque 7 ***Interprétation géométrique***

Exercice 3 *Considérons l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x + 1$.*

- *Montrer que f admet au moins une racine réelle.*
- *Montrer, à l'aide du théorème de Rolle, que f admet au plus trois racines réelles.*

Théorème 3: Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
Si :

- ▶ f est continue sur $[a, b]$.
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors : $\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Preuve 1

Remarque 8 *(cas complexe) ce n'est pas vrai pour les fonctions complexes.*

Définition 7: Fonctions lipschitziennes

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **lipschitzienne sur** I s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$$

Remarque 9 *Sous les hypothèses de la définition, on dit que f est λ-lipschitizienne.*

Exemples 1 *1. Les fonctions constantes sont lipschtziennes sur $\mathbb{R}$.*

2. La fonction identité est 1-lipschitienne sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction carré ne l'est pas! (Pourquoi?)

Corollaire 1: Inégalité des accroissement finis

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On désigne par $\overset{\circ}{I}$ l'intérieur de I.
Si :

- f est continue sur I.
- f est dérivable sur l'intérieur de I.
- $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq M$.

Alors, f est M-lipschitzienne.

Exercice 4 *Montrer que la fonction* sin *est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ puis en déduire que $|\sin(x)| \leq |x|$, pour tout réel x.*

Corollaire 2: Signe de la dérivée et la monotonie

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

- f est constante $\iff$ $f' = 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.
- f est croissante $\iff$ $f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.
- f est décroissante $\iff$ $f' \leq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.

Corollaire 3

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

- Si $f' > 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' > 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque 10 *Sous les données du corrolaire précédent,*

1. *Si $f' \geq 0$, sur l'intérieur de I et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est **strcitement croissante** sur I.*
2. *Si $f' \leq 0$, sur l'intérieur de I et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est **strcitement décroissante** sur I.*

3 Dérivées d'ordre supérieur et fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 8

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $n \geq 2$. Les dérivées n-ièmes de f sont f définies par récurrence :

- f est dit **deux fois dérivable sur** I si f est dérivable sur I et si f' est aussi dérivable sur I. Dans ce cas, la dérivée de f' est appelée **dérivée seconde** de f et est notée par f'' ou par $f^{(2)}$.
- f est dit n fois dérivable sur I si f est $n-1$ fois dérivable sur I et si la dérivée $(n-1)$-ième est dérivable sur I.
  Dans ce cas, la dérivée de $f^{(n-1)}$ est appelée la dérivée n-ième de f et est notée par $f^{(n)}$.

Remarque 11 *Par convention, on note* $f^{(0)} = f$.

Définition 9: fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- f est dite **de classe $\mathcal{C}^n$ sur** I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. De plus, l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté par $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
- f est dite **de classe $\mathcal{C}^\infty$** sur I si f est de classe $\mathcal{C}^k$, pour tout $k \geq 0$. Dans ce cas on dit que f est **indéfiniment dérivable**.
  De plus, l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté par $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Proposition 7

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. Alors, f est de classe $\mathcal{C}^n$ si, et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ le sont. Dans ce cas, on a pour tout $k \leq n$:

$$f^{(k)} = Re(f)^{(k)} + iIm(f)^{(k)}$$

Exemples 2

1. *La fonction* exp *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* $(\exp)^{(n)} = \exp$.
2. *Si* P *est fonction polynomiale de degré* n*, alors* P *est classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et si* $k \geq n+1$, $P^{(k)} = 0$.
3. *La fonction inverse est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]0, +\infty[$ *, et pour tout* $n \geq 0$ *:*

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Propriétés 4: Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, avec $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

- **Combinaison linéaire :** $f + \lambda.g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $(f + \lambda.g)^{(k)} = f^{(k)} + \lambda.g^{(k)}$, pour tout $k \leq n$.
- **Produit :** fg est de classe $\mathcal{C}^n$ et pour tout $k \leq n$

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)} \qquad \textbf{(Formule de Leibniz)}$$

- **Inverse :** Si f ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{g}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

Propriétés 5

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et g l'est sur J et $f(I) \subseteq J$, alors la fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Théorème 4

Si $f : I \longrightarrow J$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^n$, avec $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ telle que f' ne s'annule pas sur I, alors la bijection réciproque est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

Proposition 8: IAF, cas complexe

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Si $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f'(x)| \leq M$, pour tout $x \in I$. Alors, f est M-lipschitzienne.