

Chapitre 15: Fonctions à une variable réelle (3): Continuité

Dans toute la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et I désigne un intervalle non vide et non trivial de \mathbb{R} .

1 Continuité d'une fonction

Définition 1

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $a \in I$.

On dit que f est **continue en** a si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$.

Dans le cas contraire, on dit que f est **discontinue** en a .

Méthode 1 Pour montrer que f est continue en a , il suffit de montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$.

Exercice 1 Étudier la continuité de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Définition 2

On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue sur** I si f est continue en tout point de I .

On note par $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur I à valeurs dans \mathbb{K} .

Proposition 1

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in I$. Alors ,

f est continue en a (resp. sur I) si, et seulement si les fonctions à valeurs réelles $Re(f)$ et $Im(f)$ le sont.

Propriétés 1: Exemples de référence

- Les fonctions \exp , \cos , \sin , \cosh , \sinh , \tanh et \arctan sont continues sur \mathbb{R} .
- Les fonctions polynomiales sont continues sur \mathbb{R} .
- La fonction racine carré est continue en tout point de $[0, +\infty[$ et la fonction \ln l'est sur $]0, +\infty[$.
- Les fonctions arccos et arcsin sont continues sur $[-1, 1]$.
- La fonction partie entière l'est en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- La fonction \tan est continue sur chaque intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} - k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, avec $k \in \mathbb{Z}$, donc en particulier sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- La fonction $x \mapsto e^{ix}$ est continue sur \mathbb{R} .

Propriétés 2: Opérations sur les fonctions

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,

- Les fonctions $f + \lambda g$ et fg sont continues sur I .
- Si g ne s'annule pas sur I , alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$.
En particulier, toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.

Proposition 2: Continuité de la fonction composée

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont deux fonctions continues tels que $f(I) \subseteq J$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I .

Exercice 2 Étudier la continuité des fonctions $x \mapsto e^{ix}$ et $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$.

Théorème 1: Continuité et suites réelles

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue en $a \in I$ et si $(u_n)_n$ une suite réelle à valeurs dans I qui admet pour limite a , alors $\lim f(u_n) = f(a)$.

Méthode 2 Pour montrer alors qu'une fonction est **discontinue** en un point a , il suffit de trouver une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans I de limite a telle que la suite $(f(u_n))_n$ ne converge pas vers $f(a)$.

Exercice 3 Étudier la continuité en 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1.1 Continuité à droite, à gauche

Définition 3

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $a \in I$. On dit que :

- ▶ f est **continue à droite** en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
- ▶ f est **continue à gauche** en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Exercice 4 Étudier la continuité à droite et à gauche de la fonction partie entière en tout point n de \mathbb{Z} .

Proposition 3

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et a un point de I qui n'est pas une extrémité de I . Alors :

$$f \text{ continue en } a \iff f \text{ est continue à gauche et à droite en } a.$$

Exemples 1 La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2 Prolongement par continuité

Définition 4

Si $f : I - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qui admet $l \in \mathbb{R}$ **pour limite en** a . Alors la fonction g **définie** sur I par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

est **continue en** a .

La fonction g est alors appelé le **prologement par continuité** de la fonction f en a .

Remarque 1 Une fonction $f : I - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ admet alors un prolongement par continuité en $a \notin I$ si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 Dire pourquoi la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0.

3 Théorèmes de continuité

Théorème 2: Théorème des valeurs intermédiaires, 1ère version

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$.

Alors, il existe $c \in [a, b]$, $f(c) = 0$.

Preuve :

Remarque 2 Autrement dit, sous les hypothèses du théorème, l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue x , admet au moins **solution sur** l'intervalle $[a, b]$.

Exercice 6 Montrer que l'équation $x^3 + x^2 = 1$ admet au moins une solution sur \mathbb{R} .

Remarque 3 Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[, f(c) = 0$.

Corollaire 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- Si f change de signes sur I , alors $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ s'annule sur I .
- Si f ne s'annule pas sur l'intervalle I , alors il garde un signe constant sur cet intervalle.

Théorème 3: Théorème des valeurs intérieures, 2ème version

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f prend toute valeurs comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
i.e. si λ est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\lambda = f(c)$.

Corollaire 2: Théorème des valeurs intérieures, 3ème version

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $f(I)$ est un intervalle.
Plus précisément,

I	$f(I)$, si f est ↗	$f(I)$, si f est ↘
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$

Définition 5: Rappels

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- On dit que f admet un maximum en a si $f(a) \geq f(x)$, pour tout $x \in I$.
- On dit que f admet un minimum en a si $f(a) \leq f(x)$, pour tout $x \in I$.
- On dit que f admet un extremum global (ou tout simplement extremum) en a , si f admet un minimum ou un maximum en a .

Théorème 4: Théorème des bornes atteintes

L'image d'un **segment** par une fonction continue est **segment**.

Plus précisément, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. il existe $c, d \in [a, b]$ tels que :

$$f(c) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \text{ et } f(d) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

Autrement dit, il existe $c, d \in [a, b]$ tels que f admet un minimum en c et un maximum en d .

Définition 6: injectivité

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **injective** si :

$$\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \implies x = y$$

Ce qui revient à

$$\forall x, y \in E, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

Remarque 4 Une application $f : E \rightarrow F$ est dite alors **injective** si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in E$, admet **au plus** une solution.

Exercice 7 Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x - 7 \end{aligned}$$

est injective.

Exemples 2 La fonction puissance carrée n'est pas injective sur \mathbb{R} mais elle l'est sur $[0, +\infty[$.

Proposition 4

La composée de deux applications injectives est injective.

Théorème 5

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est injective sur I si, et seulement si f est strictement monotone sur I .

Théorème 6: Théorème de continuité d'une fonction réciproque

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement monotone sur I , alors f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$.

De plus, la fonction réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue sur J .