

Chapitre 14 : Fonctions à une variable réelle (2): Limites

Dans toute la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I désignera un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. $\bar{I}$ désignera son adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$.

1 Définitions

Définition 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $\mathcal{P}$ une propriété.

On dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si :

$$a \in \mathbb{R} \quad \text{et } \exists \delta > 0, f \text{ vérifie } \mathcal{P} \text{ sur } I \cap]a - \delta, a + \delta[$$

ou

$$a = +\infty \quad \text{et } \exists A > 0, f \text{ vérifie } \mathcal{P} \text{ sur } I \cap [A, +\infty[$$

ou

$$a = -\infty \quad \text{et } \exists B < 0, f \text{ vérifie } \mathcal{P} \text{ sur } I \cap]-\infty, B]$$

Exercice 1 Justifier pourquoi $\cos$ est positive au voisinage de 0, la fonction puissance carré est positive au voisinage de $+\infty$ et que la fonction inverse, définie sur $]0, +\infty[$, est bornée au voisinage de 1.

Définition 2: Limites finies

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $l \in \mathbb{R}$.

- **Cas 1:** $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet l **pour limite en** a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

- **Cas 2 :** $a = +\infty$.

On dit que f admet l **pour limite en** a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, x > A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

- **Cas 3 :** $a = -\infty$.

On dit que f admet l **pour limite en** a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B < 0, \forall x \in I, x < B \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Remarque 1 Interprétations géométriques

Définition 3: Limites infinies 1

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \bar{I}$.

- **Cas 1 :** $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet $-\infty$ **pour limite en** a si :

$$\forall A < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies f(x) < A$$

- **Cas 2 :** $a = +\infty$.

On dit que f admet $-\infty$ **pour limite en** a si :

$$\forall A < 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x > B \implies f(x) < A$$

- **Cas 3 :** $a = -\infty$.

On dit que f admet $-\infty$ **pour limite en** a si :

$$\forall A < 0, \exists B < 0, \forall x \in I, x < B \implies f(x) < A$$

Définition 4: Limites infinies 2

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \bar{I}$.

- **Cas 1 :** $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet $+\infty$ **pour limite en** a si :

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies f(x) > A$$

- **Cas 2 :** $a = +\infty$.

On dit que f admet $+\infty$ **pour limite en** a si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x > B \implies f(x) > A$$

- **Cas 3 :** $a = -\infty$.

On dit que f admet $+\infty$ **pour limite en** a si :

$$\forall A > 0, \exists B < 0, \forall x \in I, x < B \implies f(x) > A$$

Remarque 2 *Interprétations géométriques*

Théorème 1: Unicité de la limite

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qui admet $l \in \bar{\mathbb{R}}$ pour limite en $a \in \bar{I}$, alors celle-ci est **unique**, et est notée par $\lim_a f$ ou par $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Proposition 1

Soient $f : I \Rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \bar{I}$ et $l \in \bar{\mathbb{R}}$.

- Si $l \in \mathbb{R}$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) - l = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - l| = 0$$

- Si $a \in \mathbb{R}$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = l$$

Proposition 2

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qui admet une limite **finie** en $a \in \bar{I}$, alors f est bornée au voisinage de a .

Définition 5: Restriction d'une application

Soient $f : E \rightarrow F$ une application et A un sous-ensemble de E .

On appelle **restriction de f sur A** l'application, notée par $f|_A$ et définie par :

$$f|_A : A \rightarrow F$$

$$x \mapsto f(x)$$

Exemples 1 Déterminer la restriction de l'application valeur absolue sur $] -\infty, 0]$ et la restriction de l'application partie entière sur $[0, 1[$.

Définition 6: Limites à gauche et à droite

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $l \in \bar{\mathbb{R}}$.

- On suppose que a n'est pas l'extrémité droite de I .
On dit que f admet l pour limite **à droite** de a si $f|_{I \cap]a, +\infty[}$ admet l pour limite en a .
Dans ce cas, cette limite est unique et on la note par $\lim_{a^+} f$ ou par $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- On suppose que a n'est pas l'extrémité gauche de I .
On dit que f admet l pour limite **à gauche** de a si $f|_{I \cap]-\infty, a[}$ admet l pour limite en a .
Dans ce cas, cette limite est unique et on la note par $\lim_{a^-} f$ ou par $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

Exercice 2 Considérons $f(x) = \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ e^x + 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Étudier la limite de f à gauche et à droite de 0.

Définition 7

Soit $f : I - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction où a n'est pas une extrémité de I .

On dit que a admet $l \in \mathbb{R}$ pour limite en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$. Cette limite est notée $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$.

Proposition 3

Par définition, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$. Dans le cas où $a \in I$, on aura :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \left(f(a) = l \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = l \right)$$

Exercice 3 Considérons $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Étudier la limite de f à gauche et à droite de 0. Que vaut alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Théorème 2: Limite et Suites

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans I , $a \in \bar{I}$ et $l \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim u_n = a$, alors $\lim f(u_n) = l$.

Méthode 1 Pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en a , il suffit de trouver deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que les suites $(f(u_n))_n$ et $(f(v_n))_n$ possèdent des limites différentes.

Exercice 4 Montrer que la fonction $\sin$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Propriétés 1: Opérations sur les limites

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $l, l' \in \bar{\mathbb{R}}$.

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$.

1. Si $l + l'$ n'est pas une forme indéterminée (f.i), alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = l + l'$.
2. Si ll' n'est pas une f.i, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = ll'$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda.l$.
4. Si $l \in \mathbb{R}^*$, alors $f \neq 0$ au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$.
5. Si $l = 0$ et $f > 0$ au voisinage de a , alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
6. Si $l = 0$ et $f < 0$ au voisinage de a , alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Proposition 4: Composée de fonctions

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$, $b \in \bar{J}$ et $l \in \bar{\mathbb{R}}$, avec $f(I) \subseteq J$.

Si $f(x) = b$ et $g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l$.

Exercice 5 Étudier la limite de $x \mapsto \frac{e^{\sin(x) \ln(x)} - 1}{\sin(x) \ln(x)}$.

Proposition 5: Limite et Inégalités

Si $f : I \implies \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si f admet une limite en a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lambda$ alors $f > \lambda$ au voisinage de a .
- Si f admet une limite en a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lambda$ alors $f < \lambda$ au voisinage de a .

Remarque 3 Le même résultat est vrai pour les limites à gauche et droite en a .

Proposition 6: Passage à la limite

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$.

On suppose que f et g possèdent des limites finies en a .

Si $f \leq g$ au voisinage de a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Remarque 4 Les inégalités *strictes deviennent larges* par passage à la limite. Par exemple :

$$\forall x > 0 : \frac{1}{x} > 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Théorème 3: Théorème d'encadrement

Soient $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $l \in \mathbb{R}$. Si $h \leq f \leq g$ au voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Corollaire 1: Cas particulier

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$.

- Si $|f| \leq g$ au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
- Le produit de deux fonctions, où l'une est bornée au voisinage de a et l'autre tend vers 0 en a , est fonction qui tend vers 0 en a .

Exercice 6 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Théorème 4: Théorèmes de minoration et majoration

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. On suppose que $f \leq g$ au voisinage de a .

1. **Théorème de Minoration** : Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.
2. **Théorème de Majoration** : Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Exercice 7 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x \sin(x)$.

Théorème 5: Théorème de la limite monotone, version 1

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Alors, f possède des limites en a et en b . Plus précisément :

1. Si f est majorée, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup_{t \in]a, b[} f(t) < +\infty$.
2. Si f n'est pas majorée, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$.

Remarque 5 Ce théorème s'adapte pour les fonctions **décroissantes** en changeant les termes 'majorée', 'sup', 'minorée' et 'inf' en '**minorée**', 'inf', '**majorée**' et 'sup'.

Théorème 6: Théorème de la limite monotone, version 2

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $x_0 \in]a, b[$ qui n'est pas une extrémité.

Alors, f admet en x_0 une **limite à droite** et une **limite à gauche** telles que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Remarque 6 Les mêmes résultats restent vrais pour les fonctions décroissantes (en inversant les inégalités).

2 Comparaison des Fonctions

2.1 Équivalence

Définition 8

Soit $a \in \bar{I}$ et soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$ deux fonctions qui **ne s'annulent pas** au voisinage de a . On dit que f est **équivalente à** g au voisinage de a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, et on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ ou plus simplement $f \underset{a}{\sim} g$.

Remarque 7 Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors on a aussi $g \underset{a}{\sim} f$. On parle dorénavant de **fonctions équivalentes** au voisinage de a , au lieu de 'fonction f équivalente à une fonction g '.

Exemples 2 • $x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x + 1$.

- $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ ne sont pas équivalentes en 0.
- Si $a \in \bar{I}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui ne s'annule pas au voisinage de a , alors $f \underset{a}{\sim} f$.
- Si $a \in \bar{I}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui ne s'annule pas au voisinage de a et qui admet une **limite finie non nulle** en a , alors $f(x) \underset{a}{\sim} l$.
Que dire si $l = 0$?

Propriétés 2

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et f, g, h et k des fonctions définies sur I à valeurs réelles qui ne s'annulent pas au voisinage de I .

- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} h$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} k$, alors $fh \underset{a}{\sim} gk$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f^\lambda \underset{a}{\sim} g^\lambda$, lorsque ces quantités sont bien définies.

Remarque 8 Comme on l'a déjà vu dans le cas des suites réelles :

1. Même si l'équivalence est stable par le produit, ce n'est pas vrai pour la somme : si f, g et h trois fonctions, alors :
 $f \underset{a}{\sim} g$ **n'implique pas forcément** que $h + f \underset{a}{\sim} h + g$.
2. L'équivalence des fonctions n'est pas stable par passage au composé, i.e. si $f \underset{a}{\sim} g$, on n'a pas forcément $h \circ f \underset{a}{\sim} h \circ g$.

Proposition 7

Soient $a \in \bar{I}$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a .

- Si $\lim_a f = l \in \bar{\mathbb{R}}$, alors $\lim_a g = l$.
- f et g ont le **même signe** au **voisinage de** a .

Proposition 8: équivalences classiques

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sin(x) \underset{0}{\sim} x & \text{b) } \tan(x) \underset{0}{\sim} x \\ \text{c) } 1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} & \text{d) } \cos(x) \underset{0}{\sim} 1 \\ \text{e) } \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x & \text{f) } e^x - 1 \underset{0}{\sim} x. \end{array}$$

Exercice 8 Considérons $f : \longrightarrow \frac{(1+e^x)\sin(x)\ln(1+x)}{x^2+x}$.
Après avoir trouver un équivalent simple de f au voisinage de 0, calculer $\lim_0 f$.

Proposition 9: Autres équivalences classiques

- $\sinh(x) \underset{0}{\sim} x$ et $\cosh(x) \underset{0}{\sim} 1$.
- Si $P(x) = a_px^p + \dots + a_qx^q$, avec $p \geq q$ des entiers naturels et $a_p, a_q \neq 0$, alors
 - $P(x) \underset{0}{\sim} a_qx^q$.
 - $P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_px^p$.

2.2 Négligeabilité

Définition 9

Soient $a \in \bar{I}$ et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a .

On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ ou encore $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$.

Remarque 9 L'expression $f(x) = o(g(x))$ est prononcée : ' $f(x)$ est une petit O de $g(x)$ '.

Exercice 9 • $x^2 \underset{0}{=} o(x)$.

- $\sin(x) \underset{0}{=} o(x)$.

Remarque 10 Comme on l'a déjà vue dans les des suites numériques :

1. Même si elle noté pas le signe ' $=$ ', mais il ne s'agit pas d'une égalité :

- Le fait que $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ n'entraîne pas forcément que $f = g$ (même au voisinage de a).
- $f + o(g) \underset{a}{=} h + o(g)$ n'implique pas que $f = h$.

2. Si $f - g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f \underset{a}{=} g + o(h)$.

3. Au lieu de noter $f \underset{a}{=} o(g)$, parfois c'est mieux de noter $f \underset{a}{\ll} g$.

Proposition 10: Comparaisons classiques au voisinage de $+\infty$

Soient $a > 1, b > 0$ et $c \in \mathbb{R}$, alors au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\ln(x)^c \ll x^b \ll a^x$$

en particulier pour $a = e > 1$.

Proposition 11: Comparaisons classique au voisinage de 0

Si $b > a > 0$, alors $x^b \underset{0}{=} o(x^a)$.

Exercice 10 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2 \ln(x)^5}$.

Proposition 12

Soient $a \in \bar{I}$ et $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Dans cette proposition, on notera tout simplement o au lieu de $\underset{a}{=}$ o . Alors :

- Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$.
- Si $f = o(h)$ et $g = o(h)$, alors $f + g = o(h)$.
- Si $f = o(h)$ et $g = o(k)$, alors $fg = o(hk)$.
En particulier, $fo(h) = o(fh)$.
- $o(\lambda f) = \lambda o(f) = o(f)$.

Remarque 11 une autre caractérisation du o Soient $a \in \bar{I}$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a . Alors,

$$f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \iff \text{il existe une fonction } \beta \text{ définie au voisinage de } a \text{ telle que } \lim_a \beta = 0 \text{ et } f(x) \underset{a}{=} \beta(x).g(x)$$

Proposition 13: Caractérisation de l'équivalence par la négligeabilité

Soient $a \in \bar{I}$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a , alors :

$$f \sim g \iff f = g + o(g)$$

, toujours au voisinage de a .

Remarque 12 En pratique $f + o(f) \sim f$.

Exercice 11 Trouver un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de la fonction f définie par :
 $f(x) = e^x + x^2 + \ln(x)$.

2.3 Dominance

Définition 10

Soient $a \in \bar{I}$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a .

On dit que f est **dominée par** g , et on écrit $f \underset{a}{=} O(g)$ ou bien $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$, si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a .

Remarque 13 l'expression $f \underset{a}{=} O(g)$ est prononcée : La fonction f est une grand O de la fonction g au voisinage de a .

Exemples 3 • $2x = O(x)$ au voisinage de 0.

- $x = O(x^2)$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $f = o(g)$, alors $f = O(g)$

Remarque 14 Comme le cas pour petit O , grand O ne s'agit pas d'une égalité.

Proposition 14

Soient $a \in \bar{I}$ et $f, g, h, k : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Toutes les expressions ci-dessous sont au voisinage de a .

Alors :

- Si $f = O(g)$ et $g = O(h)$, alors $f = O(h)$.
- Si $f = O(h)$ et $g = O(h)$, alors $f + g = O(h)$.
- Si $f = O(h)$ et $g = O(k)$, alors $fg = O(hk)$.
En particulier, $fO(h) = O(fh)$.
- $O(\lambda f) = \lambda O(f)$.

Propriétés 3: o et O

Soient $a \in \bar{I}$ et $f, g, h, k : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Toutes les expressions ci-dessous sont au voisinage de a .

Alors :

- Si $f = o(g)$ et $g = O(h)$, alors $f = o(h)$.
- Si $f = O(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$.
- Si $f = O(h)$ et $g = o(h)$, alors $f + g = o(h)$.
- Si $f = o(h)$ et $g = O(h)$, alors $f + g = o(h)$.
- Si $f = o(h)$ et $g = O(k)$, alors $fg = o(hk)$.
- Si $f = O(h)$ et $g = o(k)$, alors $fg = o(hk)$.

3 Extension au cas des fonctions à valeurs complexes

Définition 11

Soit $f; I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction **complexe**.

On dit que f est **bornée** si la fonction, à valeurs réelles, $|f|$ est bornée, i.e.s'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in I, |f(x)| \leq M$$

Dans ce cas, on écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ou bien $\lim_a f = l$.

Définition 12

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, on dit que f admet une limite $l \in \mathbb{C}$ en $a \in \bar{I}$ si $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - l| = 0$.

Théorème 7

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \bar{I}$ et $l \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \lim_a \operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(l) \text{ et } \lim_a \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(l)$$

Exercice 12 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ix}}{x+1}$.