

Chapitre 13 : Suites Numériques

Dans toute la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

Définition 1

On appelle **suite numérique** toute application d'un ensemble de la forme $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$ vers $\mathbb{K}$, avec $n_0 \in \mathbb{N}$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la suite est dite **réelle**, et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la suite est dite **complexe**.

Notation 1 • Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une suite numérique, alors si on note $u_n := f(n)$, alors l'application f est notée par $(u_n)_{n \geq 0}$.

- La donnée de $(u_n)_{n \geq 0}$ est la donnée d'une suite numérique, i.e. une application qui fait associer à chaque $n \in \mathbb{N}$ un élément $u_n \in \mathbb{K}$.

Exemples 1 $(n+1)_{n \geq 0}$ est une suite réelle et $\left(\frac{1+i}{n}\right)_{n \geq 1}$ est une suite complexe.

Définition 2: Monotonie d'une suite réelle

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On dit que :

- $(u_n)_n$ est **croissante** (resp. **décroissante**) si pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$).
- $(u_n)_n$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- $(u_n)_n$ est **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) si pour tout $n \geq 0$, $u_n < u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$).
- $(u_n)_n$ est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Méthode 1 En général, pour déterminer la monotonie d'une suite réelle, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$, pour tout $n \geq 0$. Si de plus (u_n) est une suite strictement positive, parfois c'est mieux de comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Exercice 1 Étudier la monotonie de $(2n-1)_n$ et $(n!)_n$.

Définition 3

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On dit que

- $(u_n)_n$ est **constante** si pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n$, ou encore si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = c$, pour tout $n \geq 0$.
- $(u_n)_n$ est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang, i.e. si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n$$

Définition 4

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

- $(u_n)_n$ est dite **majorée** si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, \quad u_n \leq M$$

- $(u_n)_n$ est dite **minorée** si :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, \quad u_n \geq m$$

- $(u_n)_n$ est dite **bornée** si elle à la fois majorée et minorée, ou encore si :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq 0, \quad |u_n| \leq M$$

Exemples 2 • La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_n$ est minorée par 0 et majorée par 1.

- La suite $(\sin(n))_n$ est bornée.

2 Limite d'une suite

Définition 5

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

- Si $l \in \mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_n$ admet l pour limite si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \varepsilon$$

- On dit que $(u_n)_n$ admet $+\infty$ pour limite si : $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n > A$

- On dit que $(u_n)_n$ admet $-\infty$ pour limite si : $\forall B < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n < B$

Notation 2 Pour exprimer qu'une suite $(u_n)_n$ admet $l \in \overline{\mathbb{R}}$, on note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$.

Théorème 1: Unicité de la limite

Si $(u_n)_n$ est une suite réelle qui admet $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors celle-ci est **unique** et est notée $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ou simplement $\lim u_n$.

Exercice 2 Montrer que $\lim \frac{1}{n} = 0$ et $\lim n = +\infty$.

Proposition 1

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.

- $\lim u_n = l \iff \lim(u_n - l) = 0 \iff \lim |u_n - l| = 0$
- $\lim u_n = l \implies \lim |u_n| = |l|$
En particulier $\lim u_n = 0 \iff \lim |u_n| = 0$.

Définition 6

- Une suite réelle est dite **convergente** si elle admet une limite finie. Dans ce cas, on dit que la suite **converge** vers sa limite.
- Une suite non convergente est appelée **divergente**.
Donc, une suite divergente est une suite qui admet $l \in \{-\infty, +\infty\}$ pour limite, **ou bien** c'est une suite qui n'admet pas de limite.

Exemples 3 La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est une suite convergente et $((-1)^n)_n$ est une suite divergente (à voir plus tard).

Théorème 2

Une suite convergente est bornée.

Remarque 1 La réciproque du résultat précédent est fausse. Un contre exemple est donné par la suite $((-1)^n)_n$.

Définition 7

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique.

On appelle **suite extraite** de la suite $(u_n)_n$ toute suite $(v_n)_n$ telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$, pour tout $n \geq 0$, avec $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Exemples 4 $(u_{n-1})_n$, $(u_{n+1})_n$ et $(u_{2n})_n$ sont toutes des suites extraites de la suite $(u_n)_n$.

Théorème 3

Si $(u_n)_n$ est une suite réelle qui admet $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite, alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ admet aussi l pour limite.

Méthode 2 Le théorème précédent donne une manière excellente pour montrer qu'une certaine suite $(u_n)_n$ n'admet pas de limite. Pour cela, il suffit de trouver deux suites extraites de $(u_n)_n$ qui admettent deux limites **différentes**.

Exercice 3 Montrer que la suite $((-1)^n)_n$ n'admet pas de limite.

Proposition 2

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :

$$\lim u_n = l \iff \begin{cases} \lim u_{2n} = l \\ \lim u_{2n+1} = l \end{cases}$$

Propriétés 1: Opérations sur les limites

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles admettant respectivement $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ comme limites. Alors,

- Si $l_1 + l_2$ n'est pas une forme indéterminée, alors $\lim u_n + v_n = l_1 + l_2$.
- Si $l_1 \cdot l_2$ n'est pas une forme indéterminée, alors $\lim u_n v_n = l_1 l_2$.

Corollaire 1

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes, alors il en est de même pour $(u_n + \lambda v_n)_n$ et $(u_n v_n)_n$.
- Si $(u_n)_n$ est convergente et $(v_n)_n$ est divergente, alors $(u_n + v_n)_n$ est divergente.

Remarque.

- Si $\lim u_n = l > 0$, alors (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang.

Définition 8

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

- On notera $\lim u_n = 0^+$ si $\lim u_n = 0$ et si $(u_n)_n$ est **strictement positive** à partir d'un certain rang.
- On notera $\lim u_n = 0^-$ si $\lim u_n = 0$ et si $(u_n)_n$ est **strictement négative** à partir d'un certain rang.

Propriétés 2

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et l un réel.

- Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \neq 0$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l}$.
- Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^+$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^-$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.
- Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pm\infty$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque 2

Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, sans rien préciser sur le signe de (u_n) , on ne peut rien dire alors sur la limite éventuelle de $\left(\frac{1}{u_n}\right)_n$. Un exemple est donnée par $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_n$.

Théorème 4: Théorème de convergence par encadrement

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ et $(w_n)_n$ des suites réelles telles que:

$$\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim v_n = \lim u_n = l \in \mathbb{R} \end{cases}, \text{ à partir d'un certain rang}$$

Alors, $(u_n)_n$ est convergente et $\lim u_n = l$.

Exercice 4 Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{k}}$$

Corollaire 2

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que :

$$\begin{cases} |u_n - l| \leq v_n \\ \lim v_n = 0 \in \mathbb{R} \end{cases}, \text{ à partir d'un certain rang}$$

Alors, $(u_n)_n$ converge vers l .

Corollaire 3

Le produit de deux suites réelles telles que l'une converge vers 0 et l'autre est bornée, est une suite convergente vers 0.

Exemples 5 $\lim \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

Théorème 5

- **Théorème de majoration:** Si $(u_n)_n$ est une suite réelle majorée par une autre suite réelle qui diverge vers $-\infty$, alors $(u_n)_n$ diverge aussi vers $-\infty$.
- **Théorème de minoration:** Si $(u_n)_n$ est une suite réelle minorée par une autre suite réelle qui diverge vers $+\infty$, alors $(u_n)_n$ diverge aussi vers $+\infty$.

Exercice 5 Étudier la limite de $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n \geq 1}$

Proposition 3: Passage à la limite

Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites convergentes telles que

$$u_n \leq v_n, \text{ à partir d'un certain rang}$$

alors, $\lim u_n \leq \lim v_n$

Remarque 3 Même une inégalité stricte devient une inégalité **large** par passage à la limite, voir par exemple que la suite strictement positive $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ converge vers 0.

Proposition 4

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle admettant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $m, M \in \mathbb{R}$. Donc,

- Si $\lim u_n < M$, alors $u_n < M$, à partir d'un certain rang.
- Si $\lim u_n > m$, alors $u_n > m$, à partir d'un certain rang.

Exercice 6 Soit $(u_n)_n$ une suite réelle telle que $\lim \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{3}$. Montrer que $\lim u_n = 0$.

3 Suites Monotones

Théorème 6: Théorème de la limite monotone

Toute suite monotone admet une limite. En effet : Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

1. **Cas 1 : $(u_n)_n$ est croissante :**

- (a) Si $(u_n)_n$ est majorée, alors elle est convergente et $\lim u_n = \sup\{u_n, n \geq 0\}$.
- (b) Si $(u_n)_n$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

2. **Cas 2 : $(u_n)_n$ est décroissante :**

- (a) Si $(u_n)_n$ est minorée, alors elle converge et $\lim u_n = \inf\{u_n, n \geq 0\}$.
- (b) Si $(u_n)_n$ n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

Remarque 4 D'après ce théorème alors, une suite montone **admet** nécessairement une **limite**.

Exercice 7 On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n, \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_n$.
3. En déduire que $\lim u_n = +\infty$.

4 Suites Adjacentes

Définition 9

Deux suites réelles $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont dites **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim a_n - b_n = 0$.

Exercice 8 Considérons les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \text{ et } b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

pour tout $n \geq 1$.

Montrez que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes.

(voir TD...ou un DL)

Théorème 7

Deux suites adjacentes **convergent vers la même limite**.

5 Suites et Bornes Sup/Inf

Théorème 8

- Si A est une partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$, alors il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A telle que $\lim a_n = \sup(A)$ (resp. $\lim a_n = \inf(A)$).
- Si A est une partie non vide et non majorée (resp. non minorée) de $\mathbb{R}$, alors il existe une suite d'éléments de A telle que $\lim a_n = +\infty$ (resp. $\lim a_n = -\infty$).

6 Comparaison des suites réelles

6.1 Équivalence

Définition 10

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites réelles **non nuls** à partir d'un certain rang.

On dit que $(a_n)_n$ est **équivalente** à $(b_n)_n$ et on note $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, ou tout simplement $a_n \sim b_n$, si

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Remarque 5 Si $a_n \sim b_n$, alors on a aussi $b_n \sim a_n$, on parle dorénavant de **suites équivalentes**, au lieu de 'suite X équivalente à une suite Y '.

Exemples 6 • Les suites $(n)_n$, $(n-1)_n$ et $(n+1)_n$ sont deux à deux équivalentes.

- Les suites $(n^2)_n$ et $(n)_n$ ne le sont pas.
- Si $(a_n)_n$ est une suite qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $a_n \sim a_n$.
- Si $(a_n)_n$ est une suite qui converge vers $l \neq 0$, alors $a_n \sim l$.
Que dire si $l = 0$?

Propriétés 3

Soient (a_n) , (b_n) , (c_n) et (d_n) des suites réelles non nulles à partir d'un certain rang et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $a_n \sim b_n$ et $b_n \sim c_n$, alors $a_n \sim c_n$.
- Si $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$, alors $a_n c_n \sim b_n d_n$.
- Si $a_n \sim b_n$, alors $\frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{b_n}$.
- Si $a_n \sim b_n$, alors $a_n^\lambda \sim b_n^\lambda$, lorsque ces quantités sont bien définies.

Remarque 6 1. Même si il est vrai pour les puissances, mais ce n'est pas le cas pour toute fonction.
Par exemple (n) et $(n+1)$ sont équivalentes mais (e^n) et (e^{n+1}) ne le sont pas.

2. La fait que $a_n \sim c_n$ **n'implique pas** forcément que $a_n + b_n \sim b_n + c_n$. En effet, voir que $n+1 \sim n$ et $-n \sim 2-n$, mais $(n+1) + (-n) = (1)$ n'est pas équivalente $(2) = (n) + (2-n)$.

Proposition 5

Soient (a_n) et (b_n) deux suites équivalentes. Alors,

- (a_n) et (b_n) ont même signe à partir d'un certain rang.
- Si $\lim a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim b_n = l$.

Remarque 7 Deux suites, qui admettent la même limite nulle, ne sont pas nécessairement équivalentes.

Propriétés 4: Équivalentes classiques

Soit $(u_n)_n$ une suite qui **converge vers 0**. Alors,

- $\sin(u_n) \sim \tan(u_n) \sim u_n$ et $\cos(u_n) \sim 1$.
- $1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$.
- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$.
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.

Exercice 9 on définit la suite (u_n) par :

$$u_n = \frac{\cos\left(\frac{1}{n^2+1}\right) \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{n^2+n}$$

1. Trouver un équivalent simple de (u_n) .
2. En déduire $\lim u_n$.

Propriétés 5: Autres équivalentes classiques

Soit $(u_n)_n$ qui converge vers 0. Alors :

- $\sinh(u_n) \sim \tanh(u_n) \sim u_n$ et $\cosh(u_n) \sim 1$.
- $\arcsin(u_n) \sim \arctan(u_n) \sim u_n$.

Proposition 6

Si $P = a_d x^d + \dots + a_1 X + a_0$ est un polynôme de degré d , alors $P(n) \sim a_d n^d$.

6.2 Négligeabilité

Définition 11

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites réelles **non nulles** à partir d'un certain rang.
On dit que $(a_n)_n$ est **négligeable devant** $(b_n)_n$, et on note $a_n = o(b_n)$, si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Remarque 8 L'expression $a_n = o(b_n)$ se prononce 'la suite (a_n) est un petit O de la suite (b_n) '.

Exemples 7 1. $n = o(n^3)$ et $n^2 = o(n^3)$

2. $\sin(n) = o(n)$.

Remarque 9 1. Même si elle est noté par le signe $=$, mais il ne s'agit pas vraiment d'une égalité :

- Si $a_n = o(c_n)$ et $b_n = o(c_n)$, on n'a pas forcément $a_n = b_n$ (voir le premier exemple ci-dessus).
- La fait que $a_n + o(c_n) = b_n + o(c_n)$ n'implique pas que $a_n = b_n$.

$o(a_n)$ est en fait **l'une** des suites négligeables devant la suite (a_n) .

2. Si $a_n - b_n = o(c_n)$, alors on a bien $a_n = b_n + o(c_n)$.
3. Au lieu de noter $a_n = o(b_n)$, parfois c'est plus pratique de noter $a_n \ll b_n$.

Proposition 7

Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ et (d_n) des suites réelles qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors :

- Si $a_n = o(b_n)$ et $b_n = o(c_n)$, alors $a_n = o(c_n)$.
- Si $a_n = o(c_n)$ et $b_n = o(c_n)$, alors $a_n + b_n = o(c_n)$.
- Si $a_n = o(c_n)$ et $b_n = o(d_n)$, alors $a_n b_n = o(c_n d_n)$.
En particulier, $a_n o(c_n) = o(a_n c_n)$.
- $o(\lambda a_n) = \lambda o(a_n)$.

Propriétés 6: Croissances comparées

Soit $a > 1$, $b > 0$ et $c \in \mathbb{R}$, alors :

$$(\ln(n))^c \ll n^b \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

En particulier alors pour $a = e > 1$.

Exercice 10 Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n}}{n^2 n!}$.

Proposition 8: Caractérisation de l'équivalence par la négligeabilité

Si (a_n) et (b_n) sont deux suites réelles qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, alors :

$$a_n \sim b_n \iff a_n = b_n + o(b_n)$$

Remarque 10 En pratique $a_n + o(a_n) \sim a_n$.

Exercice 11 Trouver un équivalent simple de la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 + n + \ln(n), n \geq 1$.

6.3 Dominance

Définition 12

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites réelles **non nulles** à partir d'un certain rang.

On dit que $(a_n)_n$ est **dominée par** $(b_n)_n$, et on note $a_n = O(b_n)$, si la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ est bornée.

Remarque 11 L'expression $a_n = O(b_n)$ se prononce 'la suite (a_n) est un grand O de la suite (b_n) '.

Exemples 8 • $n = O(n)$ et $2n = O(n)$.

- Si $a_n = o(b_n)$, alors $a_n = O(b_n)$.

Remarque 12 Comme le cas pour petit O , grand O ne s'agit pas d'une égalité.

Proposition 9

Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ et (d_n) des suites réelles qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors :

- Si $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(c_n)$, alors $a_n = O(c_n)$.
- Si $a_n = O(c_n)$ et $b_n = O(c_n)$, alors $a_n + b_n = O(c_n)$.
- Si $a_n = O(c_n)$ et $b_n = O(d_n)$, alors $a_n b_n = O(c_n d_n)$.
En particulier, $a_n O(c_n) = O(a_n c_n)$.
- $O(\lambda a_n) = \lambda O(a_n) = O(a_n)$.

Propriétés 7: o et O

Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ et (d_n) des suites réelles qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. Alors :

- Si $a_n = o(b_n)$ et $b_n = O(c_n)$, alors $a_n = o(c_n)$.
- Si $a_n = O(b_n)$ et $b_n = o(c_n)$, alors $a_n = o(c_n)$.
- Si $a_n = O(c_n)$ et $b_n = o(c_n)$, alors $a_n + b_n = O(c_n)$.
- Si $a_n = o(c_n)$ et $b_n = O(c_n)$, alors $a_n + b_n = O(c_n)$.
- Si $a_n = o(c_n)$ et $b_n = O(d_n)$, alors $a_n b_n = o(c_n d_n)$.
- Si $a_n = O(c_n)$ et $b_n = o(d_n)$, alors $a_n b_n = o(c_n d_n)$.

7 Extension aux suites complexes

Définition 13: Rappel

On appelle suite complexe toute suite application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{C}$.

Définition 14

Une suite complexe $(u_n)_n$ est dite bornée si et seulement si la suite réelle $(|u_n|)_n$ est bornée.

Proposition 10

Si $(u_n)_n$ est une suite complexe, alors les suites $(\operatorname{Re}(u_n))_n$ et $(\operatorname{Im}(u_n))_n$, $(|u_n|)_n$ sont des suites réelles.

Définition 15: Limite d'une suite complexe

On dit qu'une suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{C}$ si $\lim |u_n - l| = 0$.
Dans ce cas on note $\lim u_n = l$.

Remarque 13 Une suite complexe qui n'est pas convergente est dite divergente.

Théorème 9

Soiet $(u_n)_n$ une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$. Alors

$$\lim u_n = l \iff \lim \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(l) \text{ et } \lim \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(l)$$

Exercice 12 Déterminer la limite de la suite complexe de terme général $u_n = \frac{e^{in}}{n}$, $n \geq 1$.